

**DTU Informatik****IMM Informatik og Matematisk Modellering****Differentialligninger**

**Eksempel 1.**  $B$  kr forrentes med  $R\%$  p.a.

Beløb  $y(t)$  efter  $t$  år:  $r = R/100$

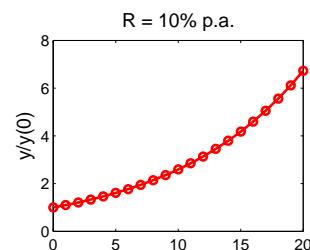
$$y(0) = B$$

$$y(1) = y(0)(1+r) = B(1+r)$$

$$y(2) = y(1)(1+r) = B(1+r)^2$$

⋮

$$y(t) = B(1+r)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$



Lineær variation af  $y$  mellem tilskrivnings-tidspunkterne.

Rente-tilskrivning med  $r\Delta t$  til tidspunkterne

$\Delta t, 2\Delta t, \dots$ :

$$y(\Delta t) = B(1+r\Delta t)$$

$$y(2\Delta t) = B(1+r\Delta t)^2$$

⋮

$$y(t+\Delta t) = y(t) + y(t) \cdot r\Delta t \Leftrightarrow$$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = r \cdot y(t)$$

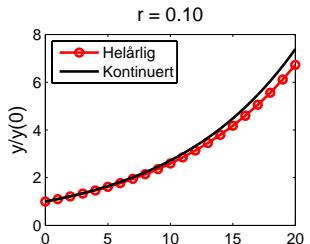
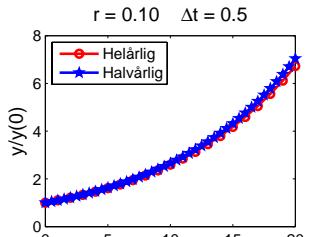
Grænseovergang  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $y' = r \cdot y$

**Differentialligning (DL).**

Fuldstændig løsning  $y(t) = Ce^{rt}$ , vilkårlig  $C$ .

Begyndelses-betingelse  $y(0) = B$

$$y(t) = B \cdot e^{rt}.$$



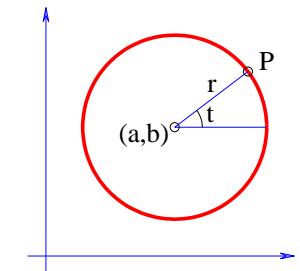
**Eksempel 2.** Cirkel med radius  $r$ , centrum  $(a, b)$

$$P : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cos t \\ b + r \sin t \end{pmatrix}.$$

Differentier

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - y \\ x - a \end{pmatrix} \quad \text{for } t \geq 0, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+r \\ b \end{pmatrix}.$$



Begyndelses-værdi problem (BVP) for et system af to samhørende 1. ordens DLer

**Eksempel 3.** Kasse på et bord.

Masse  $m$ , fjederkonstant  $mA$ , friktionskoefficient  $mB$ .

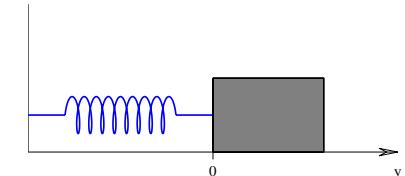
Afgivelse  $y(t)$  fra ligevægtsstilling.

Newton's 2. lov

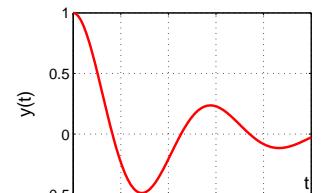
$$m \cdot y'' = -mAy - mBy'$$

Startbetingelser  $y(0) = L$ ,  $y'(0) = 0$ .

BVP for en 2. ordens DL



Kan omskrives til et BVP for et system af to samhørende 1. ordens DLer: Definér  $\vec{u}(t)$  med  $u_1(t) = y(t)$ ,  $u_2(t) = y'(t)$ ,



*Dæmpet svingning*

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -Au_1 - Bu_2 \end{pmatrix} \quad \text{for } t \geq 0, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Eksempel 4.**

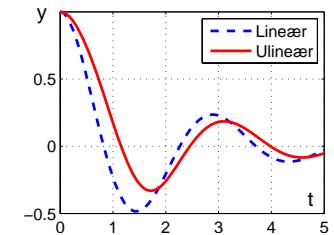
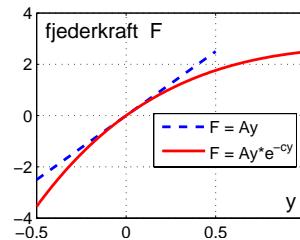
$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}u_1 + \cdots + r_{1m}u_m + g_1 \\ \vdots \\ r_{m1}u_1 + \cdots + r_{mm}u_m + g_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ \vdots \\ u_m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bruges som matematisk model for

- kemiske reaktioner i en blanding af  $m$  stoffer,
- koncentration af medicin i nyrerne,
- klima-forandringer,
- ...

$r_{11}, \dots, r_{mm}$  og  $g_1, \dots, g_m$  er konstanter eller funktioner af  $t$ .

**Eksempel 5.** Hookes lov,  $F = mAy$ , er kun en god model for fjederkraften hvis deformationen  $y$  er lille. En bedre model er  $F = mAe^{-cy}y$ , hvor  $c$  er en positiv konstant.



BVPet fra eksempel 3 ændres til

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -Ae^{-cu_1}u_1 - Bu_2 \end{pmatrix} \quad \text{for } t \geq 0, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dette er et **ulineært system af differentialligninger**.

Man må bruge en **numerisk metode** til at beregne (en tilnærmelse til) løsningen.

I eksempel 1 – 4 er der tale om **lineære differentialligninger**. Hvis koefficienterne er konstanter, kan man finde en forskrift til at beregne værdier for løsningen  $u(t)$ .

**Simple numeriske metoder**

BVP  $u' = f(t, u)$  for  $0 \leq t \leq T$ ,  $u(0) = b$ .

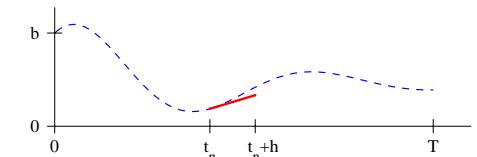
Bestem tilnærmelser til løsningens værdier for  $t$ -værdier i et "net"



**Eulers metode.** Antag, at vi kender løsningen for  $t \leq t_n$ . Ved at følge tangenten til løsningskurven i punktet  $(t_n, u(t_n))$  får vi en tilnærmelse til  $u(t_{n+1}) = u(t_n + h)$

$$u(t_{n+1}) \simeq u(t_n) + h \cdot u'(t_n) = u(t_n) + h \cdot f(t_n, u(t_n)).$$

Vi kender  $u(0) = b$ , og ved successivt at bruge denne tilnærmelse kommer vi frem til følgende forskrift til at finde værdier  $u_0, u_1, \dots, u_N$ , hvor  $u_n \simeq u(t_n)$



**Eulers metode**

$$u_0 = b$$

$$\text{for } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 : \quad u_{n+1} = u_n + h \cdot f(t_n, u_n)$$

**Eksempel 6.** Rente-problemet fra eksempel 1:

$$f(t, u) = r \cdot u$$

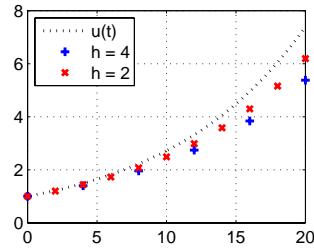
$$u_0 = B$$

$$u_{n+1} = u_n + hru_n = (1 + hr)u_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

(lige som tilskrivning med  $\Delta t = h$ .)

Det ses, at

- For hver  $h$ -værdi vokser fejlen  $|u_n - u(t_n)|$  med  $t_n$
- For mindre  $h$ -værdi fås mindre fejl ved samme  $t$ .



**Eksempel 7.** Rente-problemet fra eksempel 1.  $E_N = |u_N - u(t_N)|$ .  $N = 5, 10, 20, \dots, 2560$

**Dobbelts-logaritmisk afbilsning**

$$\log E_N = A - p \log N$$

$$E_N = C \cdot N^{-p}$$

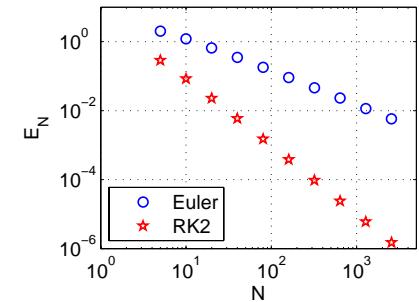
$$p_{\text{Euler}} = 1, \quad p_{\text{RK2}} = 2$$

Generelt for de to metoder.

Fejl  $E_N = 10^{-6}$  for  $N_{\text{RK2}} \approx 3135$ , dvs ca 6270 beregninger af  $f$   
 $N_{\text{Euler}} \approx 14.8$  millioner.

1 minut.

40 timer



Bedre metode: 2. ordens Runge–Kutta, **RK2**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, u_n) && \{\text{hældning til venstre}\} \\ \tilde{u}_{n+1} &= u_n + h \cdot k_1 && \{\text{Euler}\} \\ k_2 &= f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}) && \{\text{hældning til højre}\} \\ u_{k+1} &= u_n + h \cdot \frac{1}{2}(k_1 + k_2) && \{\text{brug middel – hældning}\} \end{aligned}$$

**Systemer af første ordens DL**

$$\vec{u}' = \vec{f}(t, \vec{u}) \quad \text{for } 0 \leq t \leq T, \quad \vec{u}(0) = \vec{b}.$$

De to metoder generaliserer umiddelbart. Beregner vektorer  $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N$ , hvor  $\vec{u}_n$  er en tilnærmelse til vektoren  $\vec{u}(t_n)$ .

Eulers metode:  $\vec{u}_0 = \vec{b}, \quad \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + h \cdot \vec{f}(t_n, \vec{u}_n),$

RK2:  $\vec{u}_0 = \vec{b}, \quad \vec{v} = h \cdot \vec{f}(t_n, \vec{u}_n); \quad \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \frac{1}{2}(\vec{v} + h \cdot \vec{f}(t_{n+1}, \vec{u}_n + \vec{v})),$

**Eksempel 8.** Cirkel-problemet fra eksempel 2 med centrum i  $(0, 0)$

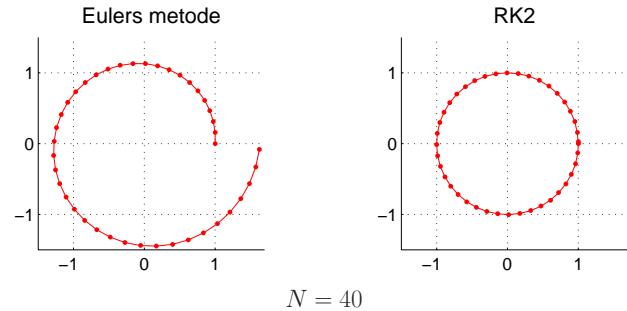
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{for } 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$h = 2\pi/N. \quad \text{Euler:}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - hy_n \\ y_n + hx_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

RK2:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_n - hy_n \\ cy_n + hx_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

hvor  $c = 1 - \frac{1}{2}h^2$ .

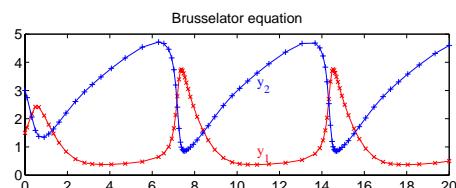
## Avancerede numeriske metoder

Der findes mange mere avancerede metoder. Nogle af dem har "adaptiv skridtlængde kontrol": I hvert skridt beregnes et mål  $\varepsilon$  for fejlen i dette skridt. Hvis  $\varepsilon$  er større end en valgt tolerance, gentages skridtet med en mindre  $h$ . Ellers accepteres skridtet, og hvis  $\varepsilon$  var væsentligt mindre end tolerancen, benyttes en større  $h$  i de efterfølgende skridt.

**Eksempel 9.** Brusselator ligningen

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y_1^2 y_2 - 4y_1 \\ 3y_1 - y_1^2 y_2 \end{pmatrix}$$

er en model for en vis kemisk reaktion.



Små skridtlængder omkring  $t = 1$ ,  $t = 7$  og  $t = 15$ , hvor løsningen ændrer sig meget hurtigt. Større skridtlængder i områder, hvor løsningen ikke varierer så voldsomt.