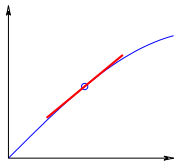
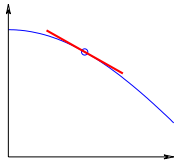
# Differentialligninger. C afsnit 8.1 pp 473 – 490

Funktion $y = y(x)$ . Differentialkvotienten $y'(x)$ er hældningen af tangenten til grafen for $y$ i punktet $(x,\ y(x))$.



Hvis $y'(x) > 0$ er funktionen voksende omkring $x$ . Hvis $y'(x) < 0$ er den aftagende.

Differentialligning: $y' = \dfrac{dy}{dx} = h(x, y)$ .



$h$ er en kendt funktion af $x$ og $y$

$x$ er den uafhængige variable; ofte $x = t$, tid.

$y$ er den afhængige variable. Hvordan finder vi den ?

Begyndelsesværdi-problem: $a \le x \le b$ . Forudsætter, at $y(a) = y_0$ er kendt.

Nøjes med at se på simple eksempler på differentialligninger.



**Ren tids differentialligning**: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\ , \quad a \le x \le b$

Stamfunktion ("antiderivative") $y(x) = F(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)du + C$ ,

hvor konstanten $C$ bestemmes ved begyndelsesbetingelsen: $C = y_0$

**Separabel differentialligning**: $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ .

Antag, at $g(y) \neq 0$ , så gælder

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx\ .$$

Lidt frækt, men (næsten) lovligt! Vi har altså fået adskilt (separeret) de variable, og ved at tage stamfunktion på begge sider finder vi

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

De videre udregninger afhænger af $g(y)$ og $f(x)$



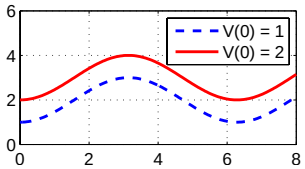
**Ren tids differentialligning.** $g(y) = 1$ :

$$\int dy = \int f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad y(x) + C_1 = F(x) + C_2$$

dvs $y(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)du + C$ som før. $(C = C_2 - C_1)$

**Eksempel**, side 476. Celle-rumfang $V(t)$ .

$$\begin{aligned} V'(t) &= \sin t \\ V(t) &= V(0) + \int_0^t \sin u\, du \\ &= V(0) + [-\cos u]_0^t \\ &= V(0) - \cos t + 1 \end{aligned}$$




Ændring af begyndelses-betingelsen svarer til parallelforskydning i $y$-retningen



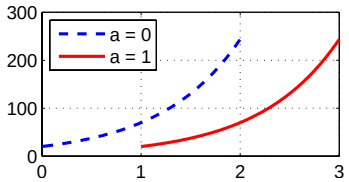
**Autonom differentialligning**: $f(x) = r$ , en konstant.

**Simpel vækst-model**, side 476ff.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= r \cdot N(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{N} = r\, dt \\ \ln|N| &= r\,t + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad N(t) = \pm e^{C_1} e^{rt} \\ N(t) &= C\, e^{rt} \end{aligned}$$

$$N(a) = N_0 = C\, e^{ra} \quad \Rightarrow \quad C = N_0\, e^{-ra}$$

$$N(t) = N(a)\, e^{r(t-a)}$$




Figuren svarer til $r = 1.25$ , $N_0 = 20$. Ændring af start-værdien for den uafhængige variable svarer til parallelforskydning i $x$-retningen.

MATLAB. `log(x)` giver den naturlige logaritme, $\ln x$ . `exp(log(x))` $= x$
`log10(x)` giver den "almindelige" logaritme, $\log x$ . `10^(log10(x))` $= x$
`log2(x)` giver 2-tals logaritmen, $\log_2 x$ . `2^(log2(x))` $= x$

Vækst model $y'(t) = r\,y(t)$ . Alle praktiske anvendelser: $y(t) > 0$ .

$r < 0$ Negativ vækst. Exponentielt henfald.

$y(t) = N(a)\,e^{r(t-a)} \to 0$ for $t \to \infty$

$r > 0$ Exponentiel vækst. $y(t) \to \infty$ for $t \to \infty$ . Realistisk ?

**Logistik ligningen** $\dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$ , $N(0) = N_0$

Antag $N, r > 0$ . Hvis $N(t) < K$ , er $N'(t) > 0$ , dvs $N$ vokser

Hvis $N(t) > K$ , er $N'(t) < 0$ , dvs $N$ aftager

Hvis $N(t) = K$ , er $N'(t) = 0$ , dvs $N$ er konstant.

$N_0 = K \quad \Rightarrow \quad N(t) = K$ for alle $t \geq 0$

$K$ kaldes kapaciteten (engelsk: carrying capacity – den mængde, som omgivelserne kan brødføde (drage omsorg for))

Hvordan løser vi logistik ligningen ?



Mellemspil $\dfrac{A}{y-a} + \dfrac{B}{y-b} = \dfrac{A(y-b) + B(y-a)}{(y-a)(y-b)} = \dfrac{(A+B)y - (Ab+Ba)}{(y-a)(y-b)}$

Antag $a \neq b$ og $y \neq a, b$ . Vi ønsker at skrive $\dfrac{1}{(y-a)(y-b)} = \dfrac{A}{y-a} + \dfrac{B}{y-b}$

Betingelser: $A + B = 0$ , $Ab + Ba = -1$ . To lineære ligninger med de ubekendte $A$ og $B$ . Løsning $B = -A = \dfrac{-1}{a-b}$

Altså $\dfrac{1}{(y-a)(y-b)} = \dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{y-a} - \dfrac{1}{y-b}\right)$

Differentialligning $\dfrac{dy}{dx} = k(y-a)(y-b)$ med $a \neq b \neq y$ . Omskrives til

$$\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)} = \int k\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y-b}\right) dy = \int k\,dx$$

$$\ln|y-a| - \ln|y-b| = \ln\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = (a-b)k\,x + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-a}{y-b} = C\,e^{(a-b)kx}$$



Løs for $y$ : $y = a + C\,e^{(a-b)kx}(y-b) \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{a - bC\,e^{(a-b)kx}}{1 - C\,e^{(a-b)kx}}$

$C$ bestemmes ved en begyndelses-betingelse.

$\dfrac{dy}{dx} = k(y-a)(y-b)$ . Hvad sker der, hvis $y = a$ , $y = b$ eller $a = b$ ?

I de første to tilfælde er $y' = 0$ , og løsningen er konstant, hhv $y(x) = a$ og $y(x) = b$

Hvis $a = b \neq y$ , bruger vi omskrivningen

$$\int \frac{dy}{(y-a)^2} = \int k\,dx \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y-a} = kx + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = a - \frac{1}{kx + C}$$

$C$ bestemmes ved en begyndelses-betingelse



**Logistik ligningen**

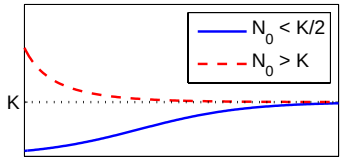
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = \frac{r}{K}N(K-N) = -\frac{r}{K}(N-0)(N-K)$$

Som mellemspillet med $k = -\dfrac{r}{K}$ , $a = 0$ , $b = K$

$$N(t) = \frac{0 - KC\,e^{(0-K)(-r/K)t}}{1 - C\,e^{(0-K)(-r/K)t}} = \frac{-KC\,e^{rt}}{1 - C\,e^{rt}} = \frac{KC}{C - e^{-rt}}$$

$$N(0) = N_0 \quad \Leftrightarrow \quad N_0 = \frac{KC}{C-1} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{N_0}{N_0 - K}$$

Indsættes $N(t) = \cdots = \dfrac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}$




$r > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-rt} \to 0$ for $t \to \infty$

og dermed $N(t) \to K$ for $t \to \infty$

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) , \qquad N(0) = N_0$$

Hvis $N_0 = 0$ , er $N'(0) = 0$ og $N(t) = 0$ for alle $t \geq 0$

Hvis $N_0 = K$ , er $N'(0) = 0$ og $N(t) = K$ for alle $t \geq 0$

Løsningerne $N(t) = 0$ og $N(t) = K$ kaldes "ligevægte" for logistik ligningen.

For alle andre (positive) startværdier søger løsningen $N(t)$ ind mod ligevægten $K$ , (men den nås aldrig)

Afsnit 8.1 behandler også nogle andre simple typer af differentialligninger og deres løsning via separation af variable.