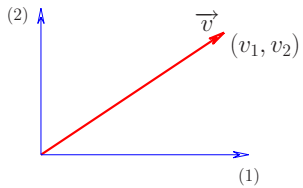
Lineær algebra pp 1 – 9

Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: liste af n reelle tal, fx $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1.2 & 3.78 \end{pmatrix}$

Elementer x_i, fx $x_2 = -1.2$. Indeks i. MATLAB: `x(i)`

Eksempel. Geometrisk vektor i planen. Koordinatsæt (v_1, v_2) er en vekter i $\mathbb{R}^2$.

Omvendt kan man tænke på $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ som en "pil" i det n-dimensionale rum



Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: liste af $m \cdot n$ reelle tal, organiseret i m rækker. n søjler.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eksempel. $4 \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$ med data for n patienter. j^{te} søjle indeholder

a_{1j} : køn
a_{2j} : alder
a_{3j} : højde
a_{4j} : vægt

Vektorer kan opfattes som udartede matricer med én række eller én søjle

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ række-vektor

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ søjle-vektor DEFAULT

En matrix kan opfattes som opbygget af vektorer

i^{te} række: $\boldsymbol{A}_{i,:} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ MATLAB: `A(i,:)`

j^{te} søjle: $\boldsymbol{A}_{:,j} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ `A(:,j)`

1.2. Regneregler for vektorer

1° Transponering: "ombyt rækker og søjler". MATLAB: `x'`

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \; : \; \boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; : \; \boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} . \qquad \left(\boldsymbol{x}^T\right)^T = \boldsymbol{x}$$

2° Multiplikation med skalar: $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

3° Addition: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ af samme type, fx søjle-vektorer:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

4° Multiplikation af to vektorer. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

4a° Indre produkt: "række gange søjle". Forudsætter $m = n$. Produktsum

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \; .$$

Jf $\vec{x} \cdot \vec{y}$. Kaldes også skalarprodukt af $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$. Bemærk, at $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}$.

4b° Ydre produkt: "søjle gange række". Normalt: $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T \neq \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} y_1 x_1 & y_1 x_2 & \cdots & y_1 x_n \\ y_2 x_1 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m x_1 & y_m x_2 & \cdots & y_m x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

4c° Elementvis multiplikation: Forudsætter $m = n$.

$$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{pmatrix}$$

MATLAB: `x .* y`

5° Norm: "Længde" af vektor. Jf $|\vec{x}|$. MATLAB: `norm(x)`

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$$

Opfylder

$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ for alle $\boldsymbol{x}$

$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (nulvektoren)

$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ for alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ (trekant-uligheden)

1.3. Regneregler for matricer

1° Transponering: "ombyt rækker og søjler". MATLAB: `A'`

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1.2 & 3.4 & 5.6 \\ 7.8 & 9.1 & -2.3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1.2 & 7.8 \\ 3.4 & 9.1 \\ 5.6 & -2.3 \end{pmatrix}$$

2° Multiplikation med skalar: $\alpha \in \mathbb{R}$. $\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{A}$ har elementerne $c_{ij} = \alpha a_{ij}$

3° Addition: $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ med lige mange rækker og lige mange søjler:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \ : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

4° Matrix–vektor multiplikation: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

$y_i = \boldsymbol{A}_{i,:} \boldsymbol{x}$, $i = 1, \ldots, m$. skalarprodukter

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} .$$

MATLAB: `y = A*x`

Diagonal matrix

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

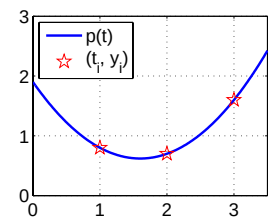
Enhedsmatrix

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

MATLAB: `D = diag(d);` `y = d .* x`

Eksempel 1.11. Parabel

$$p(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3$$



Lad

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Så er $p(t) = \boldsymbol{q}(t)^T \boldsymbol{c}$

Specielt, lad $t_i = i$, $i = 1, 2, 3$, så er $y_i = p(t_i) = \boldsymbol{q}(t_i)^T \boldsymbol{c}$, $i = 1, 2, 3$. Under ét:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} .$$

Hvis vi kender punkterne (i, y_i), $i = 1, 2, 3$, er dette et lineært ligningssystem med $\boldsymbol{c}$ som ubekendt.

5° Matrix–matrix multiplikation: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times s}$.

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ har søjlerne $\boldsymbol{C}_{:,j} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_{:,j}$, $j = 1, \ldots, s$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ er kun defineret hvis antallet af rækker i $\boldsymbol{B}$ er lig med antallet af søjler i $\boldsymbol{A}$.

Hvis både $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ er defineret, vil de normalt være forskellige.

Bruger somme tider, at $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$. (Forholdsvis nemt at bevise)