Diskrete Tidsmodeller

Jeppe Revall Frisvad

Oktober 2009

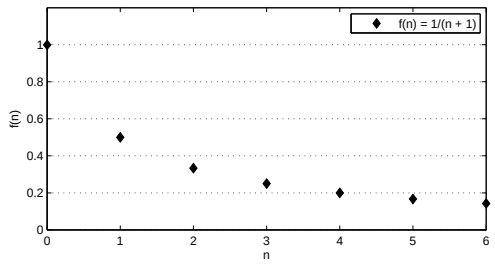
Hvad er en diskret tidsmodel?

- En funktion fra mængden af naturlige tal til mængden af reelle tal:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ .$$

- Eksempel:

$$f(n) = \frac{1}{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

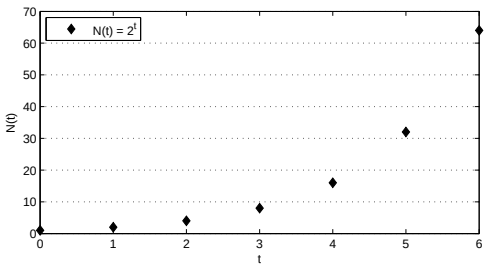


Populationsfordobling

- Populationsfordobling for hvert tidsskridt:

$$N(t) = N_0 2^t \quad , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

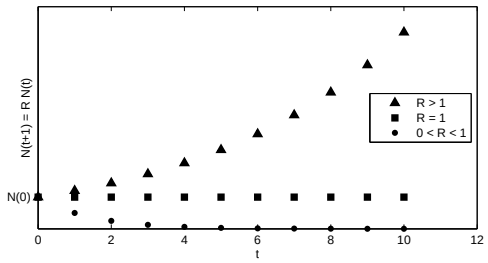
- Eksempel: $N_0 = 1$



Den generelle formel for eksponentiel vækst

- Eksponentiel vækst og henfald:

$$N(t) = N_0 R^t \quad , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$



- R kaldes vækstkonstanten (the growth constant).

Ligevægt

- Når en befolkning ikke ændrer sig med tid er den
  - i ligevægt
  - ved et ækvilibrium (equilibrium)
  - ved et fixpunkt (fixed point).
- Eksempel:
  - For $R = 1$ er en eksponentielt voksende befolkning i ligevægt.
- Konceptet "ligevægt" er vigtigt:
  Det afslører ofte, hvordan befolkning kan udvikle sig på sigt.
- Eksempel (eksponentielt voksende befolkning):

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } R > 1 \\ N(0) & \text{if } R = 1 \\ 0 & \text{if } 0 \le R < 1 \end{cases} .$$

Rekursion

- Populationsfordobling (for $N(0) = N_0 = 1$)

$$\begin{aligned} N(1) &= 2N(0) &= 2^1 \\ N(2) &= 2N(1) &= 2^2 \\ N(3) &= 2N(2) &= 2^3 \\ N(4) &= 2N(3) &= 2^4 \ . \end{aligned}$$

- Med andre ord: Følgende formler er ens
  - $N(t) = N_0 2^t \quad , \quad t \in \mathbb{N}$
  - $N(t+1) = 2N(t) \quad , \quad t = 0, 1, 2, \ldots \quad , \quad N(0) = N_0$.
- Den generelle *rekursive* formel for eksponentiel vækst/henfald:

$$N(t{+}1) = RN(t) \quad \text{med } N_0 = [\text{befolkningsantallet til tiden } t = 0] \ .$$

- En formel er *rekursiv*, når en funktion optræder både på højre og venstre side af lighedstegnet.

Aldersopdelt populationsvækst

- En befolkning opdeles i fire aldersgrupper: A0, A1, A2 og A3.
- N_i er antal individer af hunkøn i Ai for $i = 0, 1, 2, 3$.
- Hvor mange overlever efter hvert tidsskridt?

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= 0.4\, N_0(t) \\ N_2(t+1) &= 0.3\, N_1(t) \\ N_3(t+1) &= 0.1\, N_2(t) \ . \end{aligned}$$

- Hvor mange nye individer kommer til?

$$N_0(t+1) = 2\, N_1(t) + 1.5\, N_2(t) \ .$$

- En sådan befolkningsstruktur kan beskrives med en Leslie matrix. Kan du opstille matricen?

Aldersopdelt populationsvækst

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}$$

$$N_0(t) = 1000\,, \quad N_1(t) = 200\,, \quad N_2(t) = 100\,, \quad N_3(t) = 10$$

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 550 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_0(t+2) \\ N_1(t+2) \\ N_2(t+2) \\ N_3(t+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 890 \\ 220 \\ 120 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Den generelle Leslie matrix

- Antag at der er m befolkningsgrupper.
- P_i er brøkdelen af kvinder, som overlever til næste aldersgruppe ($i = 0, 1, \ldots, m-1$).
- F_i er det gennemsnitlige antal overlevende nyfødte fra kvinder i aldersgruppe i ($i = 0, 1, \ldots, m$).
- Den tilsvarende Leslie matrix ser ud som følger:

$$L = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \ldots & F_{m-1} & F_m \\ P_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & P_{m-1} & 0 \end{bmatrix} .$$

- $[P_0\ P_1\ \ldots\ P_{m-1}]$ kaldes nogen gange "første subdiagonal".

Leslie matrix egenskaber

- Når forholdet mellem successive befolkningstal konvergerer, d.v.s. når

$$\frac{N_i(t)}{N_i(t-1)} \to \lambda \quad \text{for} \quad t \to \infty \quad \text{og} \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

  da har vi en *stabil aldersfordeling* (*stable age distribution*)
- Eksempel:
  Leslie matrix:

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

  Udgangspunkt: $N_0(0) = 100$ og $N_1(0) = 100$.
  Forløb:

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 350 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 541 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 868 \\ 43 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1388 \\ 69 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2221 \\ 111 \end{bmatrix}, \ldots$$

  $\lambda = 1.6$

Leslie matrix egenskaber

- For en stabil aldersfordeling får vi også konvergerende

$$p_i(t) = \frac{N_i(t)}{N_0(0) + N_1(t) + \cdots + N_m(t)} \quad \text{med } i = 0, 1, \ldots, m$$

- Eksempel:
  Leslie matrix:

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}$$

  Udgangspunkt: $N_0(4) = 1388$ og $N_1(4) = 69$.
  Forløb:

$$N(5) = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2221 \\ 111 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3554 \\ 178 \end{bmatrix} \approx 1.6 \begin{bmatrix} 2221 \\ 111 \end{bmatrix} .$$

- $\lambda = 1.6$ kaldes en *egenværdi* for matricen og $N = [p_1\ \ p_2]^T = [0.952\ \ 0.048]^T$ kaldes en *egenvektor*.

Fra kontinuert til diskret model

- Definitionen på en differentialkvotient:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \approx \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} .$$

- Gang med Δt og læg $N(t)$ til på begge sider:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) .$$

- Dette er en *rekursiv* formel, som giver en stykvis lineær tilnærmelse til funktionen N.
- Løsningen til en differentialligning kan på denne måde tilnærmes med en diskret tidsmodel, hvor et tidsskridt er Δt.
- Jo mindre Δt, jo mere præcis bliver tilnærmelsen.
- Dette kaldes *Eulers metode*.

Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$

- MATLAB eksempel:

```
N0 = 50; r = 0.5; Dt = 3;
t = 0; N = N0;
tt = [t]; NN = [N];
t = t + Dt; N = (r*Dt + 1)*N;
tt = [tt t]; NN = [NN N];
plot(tt, NN);
```

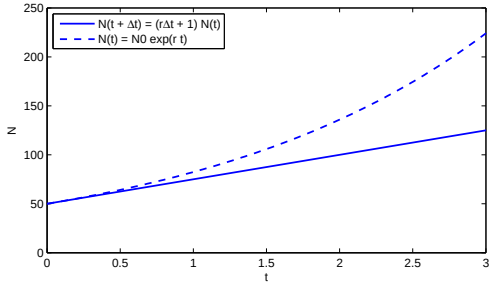
Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$



Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$

- MATLAB eksempel:

```
N0 = 50; r = 0.5; Dt = 1.5;
t = 0; N = N0;
tt = [t]; NN = [N];
t = t + Dt; N = (r*Dt + 1)*N;
tt = [tt t]; NN = [NN N];
t = t + Dt; N = (r*Dt + 1)*N;
tt = [tt t]; NN = [NN N];
plot(tt, NN);
```

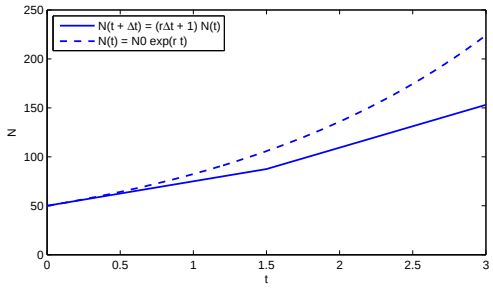
Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$



Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$

- MATLAB eksempel:

```
N0 = 50; r = 0.5; Dt = 1;
t = 0; N = N0;
tt = [t]; NN = [N];
for i=1:3
    t = t + Dt; N = (r*Dt + 1)*N;
    tt = [tt t]; NN = [NN N];
end
plot(tt, NN);
```

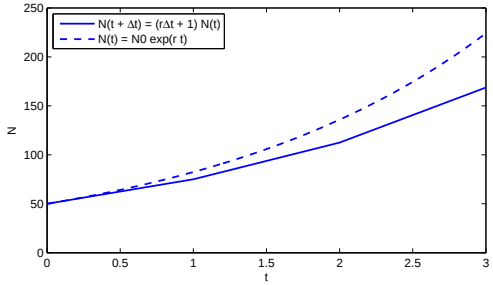
Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$



Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$

- MATLAB eksempel:

```
N0 = 50; r = 0.5; Dt = 0.3;
t = 0; N = N0;
tt = [t]; NN = [N];
for i=1:3/Dt
    t = t + Dt; N = (r*Dt + 1)*N;
    tt = [tt t]; NN = [NN N];
end
plot(tt, NN);
```

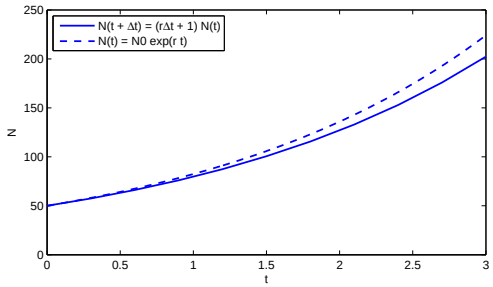
Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$



Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$

- MATLAB eksempel:

```
N0 = 50; r = 0.5; Dt = 0.03;
t = 0; N = N0;
tt = [t]; NN = [N];
for i=1:3/Dt
    t = t + Dt; N = (r*Dt + 1)*N;
    tt = [tt t]; NN = [NN N];
end
plot(tt, NN);
```

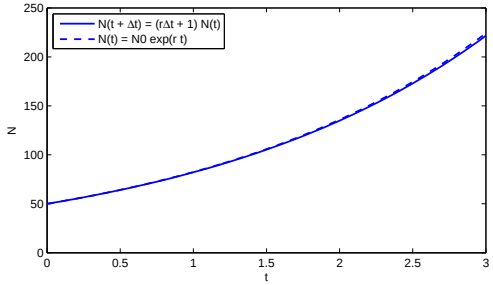
Tilnærmet løsning til differentialligning

- Differentialligningen som beskriver en per capita vækstrate r:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN(t) \ .$$

- Vi kender den eksakte løsningen fra tidligere: $N(t) = N_0 e^{rt}$.
- Stykvis lineær tilnærmelse er givet ved den rekursive formel:

$$N(t+\Delta t) \approx \frac{dN}{dt}\Delta t + N(t) = rN(t)\Delta t + N(t) = (r\Delta t + 1)N(t) \ .$$



System af differentialligninger som matrixligning

- Et homogent system af 1. ordens differentialligninger kan skrives:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \ .$$

- Eksempel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_1 + x_2 \end{aligned}$$

skrives

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

eller

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \quad , \quad \text{hvor } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Eulers metode for systemer af differentialligninger

- Eksempel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ . \end{aligned}$$

- Omskrevet til rekursive formler ved Eulers metode:

$$\begin{aligned} x_1(t+\Delta t) &= \frac{dx_1}{dt}\Delta t + x_1(t) = (a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t))\Delta t + x_1(t) \\ &= (a_{11}\Delta_t + 1)x_1(t) + a_{12}\Delta t\, x_2(t) \\ x_2(t+\Delta t) &= \frac{dx_2}{dt}\Delta t + x_2(t) = (a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t))\Delta t + x_2(t) \\ &= a_{21}\Delta t\, x_1(t) + (a_{22}\Delta t + 1)x_2(t) \ . \end{aligned}$$

Eulers metode for systemer af differentialligninger

- Eksempel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ . \end{aligned}$$

- Omskrevet til rekursive formler ved Eulers metode:

$$\begin{aligned} x_1(t+\Delta t) &= (a_{11}\Delta_t + 1)x_1(t) + a_{12}\Delta t\, x_2(t) \\ x_2(t+\Delta t) &= a_{21}\Delta t\, x_1(t) + (a_{22}\Delta t + 1)x_2(t) \ . \end{aligned}$$

  På matrixform:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+\Delta t) \\ x_2(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\Delta t + 1 & a_{12}\Delta t \\ a_{21}\Delta t & a_{22}\Delta t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

  eller ganske enkelt

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = (\mathbf{A}\Delta t + \mathbf{I})\mathbf{x}(t) \ .$$