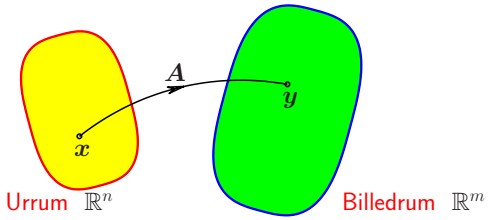
1.4. Lineær afbildning



Givet: $m \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$. m-vektoren $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

er billedet af n-vektoren $\boldsymbol{x}$.

Linearitets-betingelse:

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \quad \text{for alle} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Opfyldt. Følger af regneregler for vektorer og udtrykket for $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Specielt: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{0}_{[n]} = \boldsymbol{0}_{[m]}$

Nært beslægtet: Affin afbildning: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ hvor $\boldsymbol{b}$ er en m-vektor.
Opfylder ikke linearitets betingelserne hvis $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

Eksempel. $m = n = 1$. $y = ax + b$ beskriver en ret linie.

Affin afbildning fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$.

Hvis $b = 0$ er det en lineær afbildning; linien går gennem $(0, 0)$.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \qquad \text{Brug regneregler for vektorer}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= x_1\boldsymbol{A}_{:,1} + x_2\boldsymbol{A}_{:,2} + \cdots + x_n\boldsymbol{A}_{:,n}$$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ er en linearkombination af søjlerne i $\boldsymbol{A}$ med koefficienterne $x_1, \ldots, x_n$

Søjlerne i $\boldsymbol{A}$ udspænder billedrummet (column range)

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ hvis $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Findes der egentlige (nonzero) vektorer som afbildes i $\boldsymbol{0}$?

$$x_1\boldsymbol{A}_{:,1} + x_2\boldsymbol{A}_{:,2} + \cdots + x_n\boldsymbol{A}_{:,n} = \boldsymbol{0}$$

Antag fx $x_1 \neq 0$. Så er

$$\boldsymbol{A}_{:,1} = -\frac{x_2}{x_1}\boldsymbol{A}_{:,2} - \cdots - \frac{x_n}{x_1}\boldsymbol{A}_{:,n} \ .$$

Dvs $\boldsymbol{A}_{:,1}$ er en linearkombination af de øvrige søjler i $\boldsymbol{A}$.
Søjlerne siges at være lineært afhængige.

Hvis $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ for alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, er søjlerne i $\boldsymbol{A}$ lineært uafhængige.

Eksempel 1.16. Hvis $\boldsymbol{A}_{:,k} = \boldsymbol{0}$, så er søjlerne i $\boldsymbol{A}$ lineært afhængige: Med $x_k = 1$ og alle andre $x_j = 0$ fås $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

To egentlige vektorer $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ er lineært afhængige hvis og kun hvis de er proportionale; dvs hvis der findes et tal β således at $\boldsymbol{u} = \beta\boldsymbol{v}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Hver søjle i matricen kan skrives som en linearkombination af de to øvrige søjler:

$$\boldsymbol{A}_{:,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{:,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{:,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

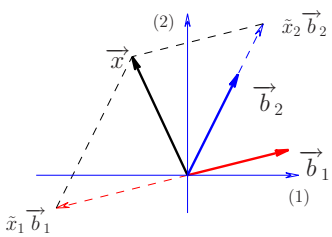
Hver af 3×2 matricerne har lineært uafhængige søjler.

1.5. Basis og koordinater

Eksempel 1.17. Geometriske vektorer i planen.
Én egentlig vektor, fx $\overrightarrow{b}_1$, udspænder en linie.

To lineært uafhængige vektorer, fx $\overrightarrow{b}_1$ og $\overrightarrow{b}_2$, udspænder hele planen. Dvs enhver vektor $\overrightarrow{x}$ i planen kan skrives som en linearkombination af $\overrightarrow{b}_1$ og $\overrightarrow{b}_2$:

$$\overrightarrow{x} = \tilde{x}_1 \overrightarrow{b}_1 + \tilde{x}_2 \overrightarrow{b}_2 .$$



Generaliserer: Hvis man har n lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, siges de at udgøre en basis for $\mathbb{R}^n$, og enhver n-vektor $\boldsymbol{x}$ kan skrives

$$\boldsymbol{x} = \tilde{x}_1\boldsymbol{b}_1 + \tilde{x}_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \tilde{x}_n\boldsymbol{b}_n$$

Koefficienterne $\{\tilde{x}_j\}$ kaldes koordinaterne for $\boldsymbol{x}$ mht basen $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$.

Kan skrive $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{x}}$, hvor $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$.

Givet basis $\boldsymbol{B}$ og koordinaterne $\tilde{\boldsymbol{x}}$ mht denne basis. $\boldsymbol{x}$ fremkommer fra koordinatvektoren ved en lineær afbildning med matricen $\boldsymbol{B}$.

Inverse problem: Hvad er koordinaterne for en given $\boldsymbol{x}$ mht basis $\boldsymbol{B}$?

Nemt hvis $\{\boldsymbol{b}_j\}$ er ortogonale: $\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{b}_j = 0$ for $i \neq j$

$$\boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{x} = \tilde{x}_1\left(\boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{b}_1\right) + \cdots + \tilde{x}_k\left(\boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{b}_k\right) + \cdots + \tilde{x}_n\left(\boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{b}_n\right) = \tilde{x}_k\left(\boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{b}_k\right)$$

$$\tilde{x}_k = \left(\boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{x}\right) / \left(\boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{b}_k\right) .$$

Endnu nemmere, hvis $\{\boldsymbol{b}_j\}$ er ortonormale, dvs ortogonale og hver af dem har normen 1

$$\boldsymbol{b}_i^T\boldsymbol{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j , \\ 1 & \text{hvis } i = j . \end{cases}$$

Da: $\tilde{x}_k = \boldsymbol{b}_k^T\boldsymbol{x}$

Eksempel. Den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^n$ er vektorerne $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, hvor $\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{I}_{:,j}$. Fx i $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

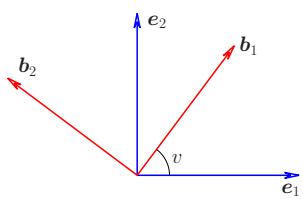
Der gælder derfor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Koordinaterne mht den sædvanlige basis er lig med elementerne i vektoren.

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ er ortonormale. I $\mathbb{R}^2$ er det generelle udtryk for ortonormale basisvektorer

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

Check: $\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{b}_2 = -\cos v \sin v + \sin v \cos v = 0$,
$\boldsymbol{b}_j^T\boldsymbol{b}_j = \cos^2 v + \sin^2 v = 1, \quad j = 1, 2$



2. Lineære ligningssystemer pp 17 – 19

Eksempel. I et lægehus er der en dag i starten af oktober blevet foretaget 23 influenza-vaccinationer. Patienterne betalte i alt 3450 kr. Hvad er prisen pr vaccination ?

$$23x = 3450$$

1 lineær ligning med 1 ubekendt. Løsning: $x = \dfrac{3450}{23} = 150$.

Generel lineær ligning med 1 ubekendt: $a\,x = b$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$ er kendte.

Hvis $a \neq 0$ er der en éntydig løsning $x = \dfrac{b}{a}$

Hvis $a = 0$, så $b = 0$: Uendeligt mange løsninger, (`NaN` i MATLAB)

Ellers : Ingen løsning. (`Inf` eller `-Inf` i MATLAB)

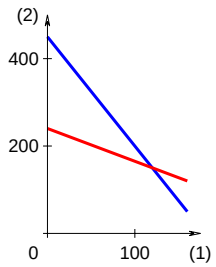
Eksempel. **Calculus** side 523. Hvert individ af dyreart 1 spiser 5 hhv 3 enheder af fodertype A hhv B pr dag. De tilsvarende tal for dyreart 2 er hhv 2 og 4. Hver dag bruges 900 enheder af fodertype A og 960 enheder af fodertype B.

Hvor mange individer er der af de to arter ?

A: $\mathbf{5x_1 + 2x_2 = 900}$

B: $\mathbf{3x_1 + 4x_2 = 960}$

2 lineære ligninger med 2 ubekendte.



Hver af ligningerne beskriver en ret linie

$$\mathbf{x_2 = -2.5x_1 + 450}, \qquad \mathbf{x_2 = -0.75x_1 + 240}$$

Løsning: Koordinater for skæringspunkt.

$$\mathbf{-2.5x_1 + 450 = -0.75x_1 + 240 \quad \Leftrightarrow \quad 1.75x_1 = 210 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 120}$$

Derefter: $\mathbf{x_2 = -2.5 \cdot 120 + 450 = 150}$.

Generelt 2×2 system (side 18 – 19, Calculus side 523 – 529)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \ , \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \ . \end{aligned} \qquad \text{kan skrives} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Antag $a_{12} \neq 0$ og $a_{22} \neq 0$. Som før

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\right) x_1 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{b_2}{a_{22}}$$

Multiplicér med $a_{12}a_{22}$: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_1$

Koefficienten til x_1 er den såkaldte determinant, $\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Forudsæt at $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Så: $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{\det \boldsymbol{A}}$, $x_2 = \cdots = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{\det \boldsymbol{A}}$

Bemærk, at tællerne er hhv $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}_{:,2} \end{pmatrix}$ og $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{:,1} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$

Metoden kaldes determinant-metoden (eller Cramér's regel). Den kan generaliseres til $n\times n$ systemer. Dårlig ide at bruge den for $n > 2$ ☹

Hvis $\det \boldsymbol{A} = 0$, siges matricen at være singulær (engelsk: singular). Da:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \qquad (\,=\beta\,) \qquad (\clubsuit)$$

De to linier har altså samme hældning, dvs

Enten er de sammenfaldende: Uendeligt mange løsninger,

eller de er parallelle: Ingen løsninger.

Af ($\clubsuit$) : $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta a_{12} \\ \beta a_{22} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

De to søjler i matricen er altå proportionale, dvs lineært afhængige.

Hvis søjlerne er lineært uafhængige, siges matricen at være regulær (engelsk: nonsingular).

Da er $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ og systemet har en éntydig løsning.

Lineært system af differentialligninger Calculus side 702 – 704

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$$

bruges som matematisk model for

- kemiske reaktioner i en blanding af n stoffer,
- koncentration af medicin i nyrerne. Compartment model
- klima-forandringer,
- ...

Elementerne i $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{f}$ er konstanter eller funktioner af t.

Calculus, kap. 11: $\boldsymbol{A}$ er konstant, $n = 2$ og systemet er **homogent**: $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}$

I LA, kap. 3 vender vi tilbage til problemet for større n