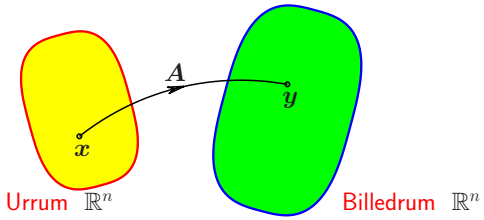
1.4. Lineær afbildning Repetition



Givet: $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$. n-vektoren $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ er billedet af n-vektoren $\boldsymbol{x}$.

Hvis søjlerne i $\boldsymbol{A}$ er lineært uafhængige, er matricen regulær og $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$

Inverse afbildning: Givet $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{y}$, find en $\boldsymbol{x}$, som afbildes i $\boldsymbol{y}$.
Lineært ligningssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
Næste gang: éntydig løsning hvis $\boldsymbol{A}$ er regulær. Skriver $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$.
Invers matrix. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$

3. Egenværdier og egenvektorer. pp 41 – 59

Givet $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Findes der en vektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ således at $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$?
Dvs billedvektor proportional med urvektor.

Egenværdi λ . Egenvektor $\boldsymbol{v}$

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Egenløsninger $\lambda_1 = -1\,,\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 2\,,\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hvis $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ og α er et vilkårligt reelt tal, så:

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{v}) \;=\; \alpha(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}) \;=\; \alpha(\lambda\boldsymbol{v}) \;=\; \lambda(\alpha\boldsymbol{v})$$

Dvs $\alpha\boldsymbol{v}$ er også en egenvektor. Burde måske tale om "egen–retning"

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{v} \quad\Leftrightarrow\quad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{0}$$ Homogent ligningssystem.

Kun hvis matricen $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ er singulær, findes der løsninger $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

Eksempel 3.2. $n = 2$. Singulær matrix har determinanten nul:

$$0 \;=\; \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) \;=\; \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \;=\; (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12}$$
$$= \;\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \;=\; P_A(\lambda)$$ Karakteristisk polynomium

Egenværdierne er rødder i $P_A(\lambda)$. Fx $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$,

$P_A(\lambda) \;=\; \lambda^2 - \lambda - 2$. Diskriminant $D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9$

Rødder: $\dfrac{1 \pm \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_1 \;=\; \dfrac{1-3}{2} \;=\; -1$, $\lambda_2 \;=\; \dfrac{1+3}{2} \;=\; 2$

$\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I} \;=\; \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ Singulær. $6x - 3y \;=\; 0$, $\boldsymbol{v}_1 \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

$D > 0$: to forskellige egenværdier. $D = 0$: én dobbelt egenværdi. $D < 0$: ingen egenværdier.

Eksempel 3.3. Egenværdierne for en trekantmatrix er diagonalelementerne. Fx

$$\boldsymbol{A} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1\,,\quad \lambda_2 = 4\,,\quad \lambda_3 = 6$$

Bevis:

$$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & 3 & 5 \\ & & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I} \;=\; \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ & 0 & 5 \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I} \;=\; \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ & -2 & 5 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ singulære

Facts (uden bevis)

1° $\boldsymbol{A}$ har højst n forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $\quad p \le n$.

2° Hvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ er indbyrdes forskellige, så er de tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ lineært uafhængige.

3° Hvis $\boldsymbol{A}$ er symmetrisk og $\lambda_i \neq \lambda_j$, så er $\boldsymbol{v}_i$ and $\boldsymbol{v}_j$ orthogonale.

4° Hvis $\boldsymbol{A}$ er symmetrisk, så kan man vælge et ortonormalt sæt af n egenvektorer for $\boldsymbol{A}$.

5° Hvis alle elementerne i $\boldsymbol{A}$ er positive og summen af elementerne i hver søjle er lig med 1, så er $\lambda = 1$ en egenværdi for $\boldsymbol{A}$.

Hvis $\lambda_i = \lambda_j$ og $\boldsymbol{v}_i$ og $\boldsymbol{v}_j$ er lineært uafhængige, så er

$$\boldsymbol{A}\,(\alpha \boldsymbol{v}_i + \beta \boldsymbol{v}_j) \;=\; \alpha(\lambda_i \boldsymbol{v}_i) + \beta(\lambda_j \boldsymbol{v}_j) \;=\; \lambda_i\,(\alpha \boldsymbol{v}_i + \beta \boldsymbol{v}_j)$$

Dvs enhver linearkombination af egenvektorerne er også en egenvektor hørende til den multiple egenværdi.

Antag, at vi kan vælge n lineært uafhænge egenvektorer for $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, og lad

$$\boldsymbol{V} \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \qquad \text{dvs} \;\; \boldsymbol{V}_{:,j} = \boldsymbol{v}_j$$

Så er

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \;=\; \boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \;=\; \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}$$

Forudsætningen om lineært uafhængige søjler i $\boldsymbol{V}$ medfører, at $\boldsymbol{V}$ er regulær, og $\boldsymbol{V}^{-1}$ eksisterer. Der gælder derfor

$$\boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{V}^{-1} \;\; \text{(faktorisering)} \qquad\qquad \boldsymbol{\Lambda} \;=\; \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V} \;\; \text{(diagonalisering)}$$

Hvis $\boldsymbol{A}$ er symmetrisk, kan vi vælge ortonormale egenvektorer.
Da er $\boldsymbol{V}$ en ortogonal matrix, og $\quad \boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{V}^T$

Eksempel 3.6. Brug af det karakteristiske polynomium, kan generaliseres til $n > 2$.

Bedre (mere effektiv og mindre følsom overfor afrundingsfejl): brug similartransformationer: $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}$, hvor $\boldsymbol{S}$ er en regulær matrix.

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \;=\; \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1} \;=\; \tilde{\boldsymbol{V}}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1} \quad \text{hvor} \quad \tilde{\boldsymbol{V}} \;=\; \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{V}$$

Dvs samme egenværdier, transformerede egenvektorer.

Fordel at benytte ortogonal $\boldsymbol{S}$: $\quad \tilde{\boldsymbol{A}} \;=\; \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{S}^T$. Bl.a. bevares evt. symmetri.

Kan bestemme en følge af transformationer således, at de successive $\tilde{\boldsymbol{A}}$-matricer konvergerer mod en øvre trekantmatrix, med egenværdierne på diagonalen. Bruges i MATLAB funktionen `eig`

3.2. Anvendelser af egenløsninger

Bl.a. til fornuftigt valg af basis for $\mathbb{R}^n$.

$$\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{x}} \;=\; \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}$$

Somme tider er det meget lettere at sige noget fornuftigt om $\tilde{\boldsymbol{x}}$ end om $\boldsymbol{x}$.

3.2.1. Differentialligninger

$$y' = \lambda\, y \;, \quad y(0) = \beta \;. \qquad\qquad \text{Løsning:} \;\; y(t) = \beta\, e^{\lambda t}$$

System:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n & \qquad y_1(0) &= \beta_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n & \qquad y_2(0) &= \beta_2 \\ &\vdots & &\vdots \\ y_1' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n & \qquad y_n(0) &= \beta_n \end{aligned}$$

Kan vi sige noget om løsningen ?

$$\boldsymbol{y}'(t) \;=\; \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(t) \quad \text{for } t > 0\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) \;=\; \boldsymbol{\beta}$$

Antag, at egenvektorerne for $\boldsymbol{A}$ er lineært uafhængige.
De udgør da en basis i $\mathbb{R}^n$, og vi kan skrive

$$\boldsymbol{y}(t) \;=\; \tilde{y}_1(t)\boldsymbol{v}_1 + \tilde{y}_2(t)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \tilde{y}_n(t)\boldsymbol{v}_n \;=\; \boldsymbol{V}\,\tilde{\boldsymbol{y}}(t)$$

Det følger, at

$$\boldsymbol{y}'(t) \;=\; \tilde{y}_1'(t)\boldsymbol{v}_1 + \tilde{y}_2'(t)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \tilde{y}_n'(t)\boldsymbol{v}_n \;=\; \boldsymbol{V}\,\tilde{\boldsymbol{y}}'(t)$$

og

$$\tilde{\boldsymbol{y}}'(t) \;=\; \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V}\,\tilde{\boldsymbol{y}}(t) \;=\; \boldsymbol{V}^{-1}\left(\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{V}^{-1}\right)\boldsymbol{V}\,\tilde{\boldsymbol{y}}(t) \;=\; \boldsymbol{\Lambda}\,\tilde{\boldsymbol{y}}(t)\,,$$

som skal løses med begyndelsesbetingelsen $\tilde{\boldsymbol{y}}(0) \;=\; \tilde{\boldsymbol{\beta}} \;=\; \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\beta}$

Simpelt problem: **for** $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\tilde{y}_j'(t) \;=\; \lambda_j\,\tilde{y}_j(t) \quad \text{for } t > 0\,, \qquad \tilde{y}_j(0) \;=\; \tilde{\beta}_j$$

Løsning $\quad \tilde{y}_j(t) \;=\; \tilde{\beta}_j e^{\lambda_j t}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

Eksempel 3.7. (compartment model)

$$\boldsymbol{y}'(t) \;=\; \begin{pmatrix} -0.18 & 0.15 \\ 0.024 & -0.27 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) \quad \text{for } t > 0\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenløsninger for $\boldsymbol{A}$:

$$\lambda_1 \;=\; -0.15\,, \quad \boldsymbol{v}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0.981 \\ 0.196 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \;=\; -0.30\,, \quad \boldsymbol{v}_2 \;=\; \begin{pmatrix} -0.781 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

Løsning:

$$y_1(t) \;=\; e^{-0.15t} - e^{-0.30t}$$

$$y_2(t) \;=\; 0.2e^{-0.15t} + 0.8e^{-0.30t}$$