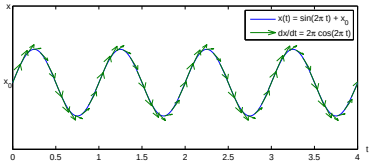
Retningsfelter

Jeppe Revall Frisvad

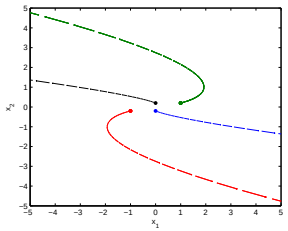
Oktober 2009

Differentialligninger

- Hvad beskriver en differentialligning?
  - Hvordan noget ændrer sig (oftest over tid).
  - Tangenthældninger langs en kurve.



- Hvad beskriver et system af differentialligninger?
  - Hvordan noget ændrer sig (oftest over tid).
  - Hvordan et dynamisk system udvikler sig fra et givent udgangspunkt.



System af differentialligninger som matrixligning

- Et homogent system af 1. ordens differentialligninger kan skrives:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \ .$$

- Eksempel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \end{aligned}$$

skrives

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

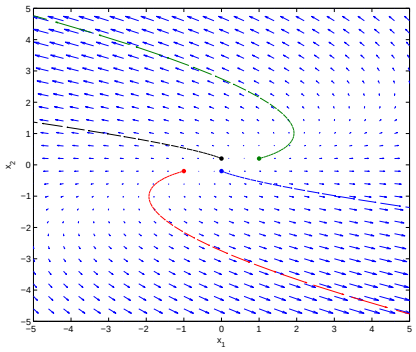
eller

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \quad , \quad \text{hvor } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

System af differentialligninger som retningsfelt

- Ved simulering finder vi systemets udvikling fra et givent udgangspunkt.
- Hvordan kan vi illustrere udviklingen fra et *vilkårligt* udgangspunkt?
- Tænk på vektoren $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ som en retningsvektor.
- Hvis vi tegner $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ for jævnt fordelte x_1 og x_2 værdier, får vi

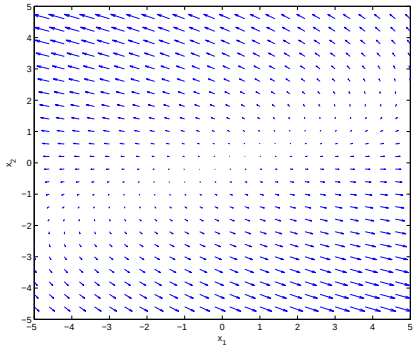
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \end{aligned}$$



Retningsfelter

- Et system af differentialligninger knytter til ethvert punkt i rummet ((x_1, x_2)-planet i eksemplet) en retningsvektor.
- Et system af differentialligninger beskriver derfor hvad vi kalder et *retningsfelt*.
- En tegning af et retningsfelt giver os en god ide om hvordan et system vil udvikle sig fra et vilkårlige udgangspunkt.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \end{aligned}$$



Gæt på en analytisk løsning

- Differentialligningen
$$\frac{dx}{dt} = ax$$
har den velkendte løsning
$$x(t) = x_0 e^{at} \ .$$
- Lad os betragte systemet af differentialligninger:
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \ .$$
- Kan vi gætte på en løsning til systemet?
- Inspireret af løsningen til én ligning, lad os gætte på
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{v} \ ,$$
hvor λ, v_1 og v_2 er konstanter og $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Gæt på en analytisk løsning

- Kan vi gætte på en løsning til systemet?
- Inspireret af løsningen til én ligning, lad os gætte på
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{v} \ ,$$
hvor λ, v_1 og v_2 er konstanter og $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- Lad os se om konstanterne kan bestemmes, så vores gæt virkelig er en løsning:
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} v_1 \lambda e^{\lambda t} \\ v_2 \lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{x}(t) \ .$$
- Systemet af differentialligninger var
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \ .$$
- Vi har altså fundet en løsning, hvis
$$\lambda \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ .$$

Gæt på en analytisk løsning

- Kan vi gætte på en løsning til systemet?
- Inspireret af løsningen til én ligning, lad os gætte på
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t}\mathbf{v} \ ,$$
hvor λ, v_1 og v_2 er konstanter og $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- Vi har fundet en løsning, hvis
$$\lambda \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ .$$
- Hvis vi indsætter $\mathbf{x}(t)$, får vi
$$\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \ ,$$
hvor $e^{\lambda t}$ udgår, så vi har en løsning, hvis
$$\lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \ .$$

Egenløsninger

- Vi har fundet en løsning

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \ ,$$

til et system af differentialligninger $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, hvis

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \ .$$

- Dette er præcis den sammenhæng, som opstår i Leslie matrix modellen, når forholdet mellem successive befolkningstal konvergerer. D.v.s. når

$$\frac{N_i(t)}{N_i(t-1)} \to \lambda \quad \text{for} \quad t \to \infty \quad \text{og} \quad i = 0, 1, \ldots, m \ ,$$

hvor N_i er antallet af individer i aldersgruppen i.
  - λ kaldes en *vækstparameter* for befolkningen (en *egenværdi* for Leslie matricen).
  - $\mathbf{v}$ kaldes en *stabil aldersfordeling* (en *egenvektor* for Leslie matricen).

Egenløsninger

- Vi har fundet en løsning

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \ ,$$

til et system af differentialligninger $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, hvis

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \ .$$

- λ kaldes en *egenværdi* for $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{v}$ kaldes den til λ hørende *egenvektor* for $\mathbf{A}$.
- Løsningen $(\lambda, \mathbf{v})$, vi har fundet, kaldes en *egenløsning*.
- Egenløsninger siger noget om hvordan et dynamisk system vil udvikle sig på sigt (som for Leslie matrix modellen).
- Egenvektorerne viser sig som tendenslinier i retningsfeltet.
- Egenløsninger findes ved at løse ligningssystemet (for $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \ .$$

Eksempel: Egenværdier

- Egenløsninger findes ved at løse ligningssystemet (for $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \ .$$

- Da vi kræver $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, kan vi finde λ ved at løse:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \ .$$

- Eksempel:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 3x_2 \end{aligned} \qquad \text{d.v.s.} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \ .$$

- Determinanten er

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 2\cdot(-2) \ .$$

- Vi skal altså løse andengradsligningen

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = (1-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \ .$$

- Løsningerne og dermed egenværdierne er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -2$.

Eksempel: Egenvektorer

- Egenløsninger findes ved at løse ligningssystemet (for $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \ .$$

- For egenværdien $\lambda_1 = 1$ har vi

$$1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} \ .$$

- Hvis vi samler v'erne på venstre side, får vi

$$\begin{aligned} v_1 - 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 - 4v_2 &= 0 \end{aligned}$$

- De 2 ligninger er ens: $v_1 = 2v_2$.
- En oplagt løsning er: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{v} = [2 \ \ 1]^{\mathrm{T}}$ er altså en til $\lambda_1 = 1$ hørende egenvektor.

Eksempel: Egenvektorer

- Egenløsninger findes ved at løse ligningssystemet (for $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \ .$$

- For egenværdien $\lambda_2 = -2$ har vi

$$-2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 - 2v_2 \\ 2v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} \ .$$

- Hvis vi samler v'erne på venstre side, får vi

$$\begin{aligned} 4v_1 - 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 - v_2 &= 0 \end{aligned}$$

- De 2 ligninger er ens: $2v_1 = v_2$.
- En oplagt løsning er: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{v} = [1 \ \ 2]^{\mathrm{T}}$ er altså en til $\lambda_2 = -2$ hørende egenvektor.

Eksempel: Egenløsninger i retningsfelt

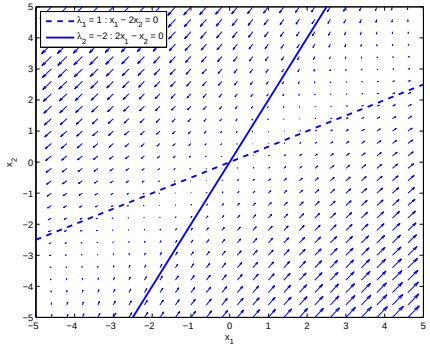
- Vi har fundet 2 egenløsninger

$$(\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = [2 \ \ 1]^{\mathrm{T}}) \quad \text{og} \quad (\lambda_2 = -2, \mathbf{v}_2 = [1 \ \ 2]^{\mathrm{T}})$$

til systemet af differentialligninger

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad , \quad \text{hvor} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \ .$$

- Egenvektorerne angiver retninger på tendenslinier i retningsfeltet, som skærer $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Egenværdierne angiver systemets udvikling langs tendenslinierne. Positiv: væk fra $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Negativ: imod $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.



Ligevægt og stabilitet

- Når et system ikke ændrer sig, er det i *ligevægt*.
- Et system ændrer sig ikke, når differentialkvotienten er 0.
- D.v.s. systemet

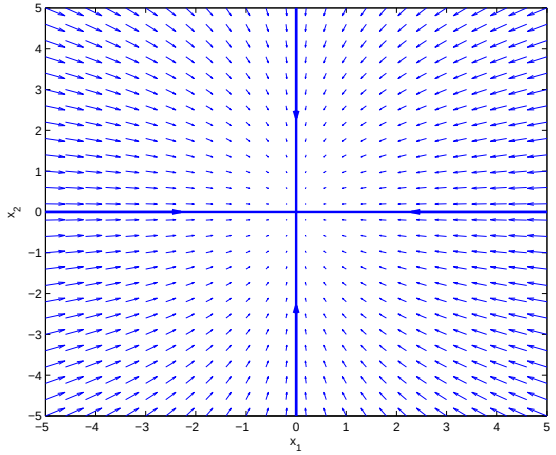
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

er i ligevægt i et punkt $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$, når $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.
- Hvis det $\mathbf{A} \neq 0$, findes kun løsningen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.
- Det kan vises at det $\mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2$. D.v.s.:
  (a) Hvis begge egenværdier er forskellige fra 0, så har systemet *kun* ligevægten $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.
  (b) Hvis én egenværdi er forskellig fra 0, så har systemet også ligevægte forskellige fra $\mathbf{0}$.
  (c) Hvis begge egenværdier er 0, så er systemet konstant og derfor altid i ligevægt.
- I det følgende betragter vi tilfældet (a), hvor begge egenværdier er forskellige fra 0.
- Egenværdiernes fortegn bestemmer ligevægtens *stabilitet*.

Stabilitet: Dræn

- Egenværdiernes fortegn bestemmer ligevægtens stabilitet. Positiv: væk fra $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Negativ: imod $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.
- Når begge egenværdier er negative: $\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 < 0$.

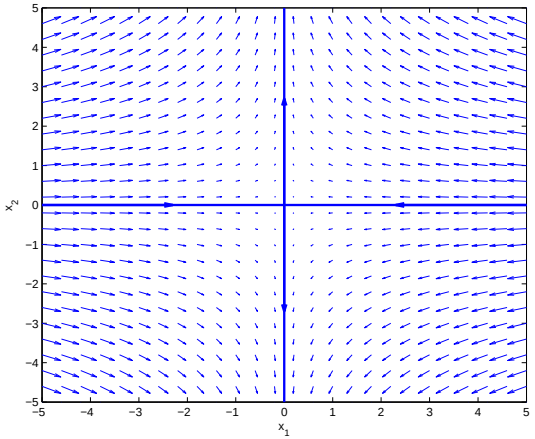
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 \end{aligned}$$



Stabilitet: Sadelpunkt

- Egenværdiernes fortegn bestemmer ligevægtens stabilitet.
  Positiv: væk fra $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Negativ: imod $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.
- Når egenværdier har forskellige fortegn: $\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 > 0$ (eller $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$).

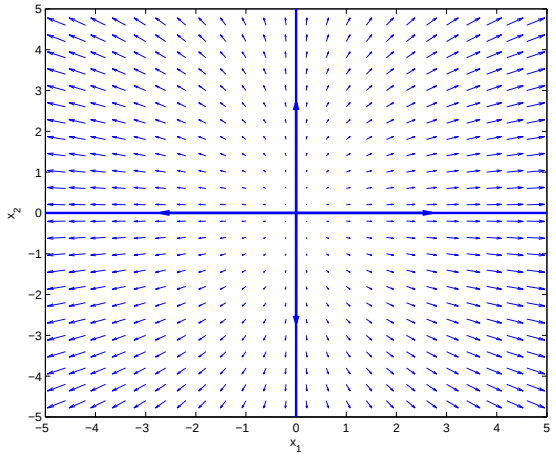
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 \end{aligned}$$



Stabilitet: Kilde

- Egenværdiernes fortegn bestemmer ligevægtens stabilitet.
  Positiv: væk fra $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Negativ: imod $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.
- Når begge egenværdier er positive: $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 > 0$.

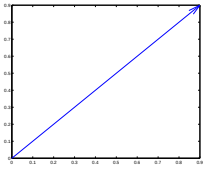
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \end{aligned}$$



Hvordan tegner man et retningsfelt i MATLAB?

- MATLAB-kommandoen `quiver` tegner pile i en figur.
- For hver pil skal MATLAB bruge 4 input: `x`, `y`, `u` og `v`.
  - (`x`, `y`) er koordinater, som angiver pilens positionen.
  - (`u`, `v`) er en vektor, som angiver pilens retning.
- Eksempel:

```
quiver(0, 0, 1, 1);
```



- Hvis `x`, `y`, `u` og `v` er vektorer med `n` elementer, tegner MATLAB en pil for hver kombination: `x(i)`, `y(i)`, `u(i)`, `v(i)`, hvor `i` er indeks fra `1` til `n`.
- Eksempel:

```
[x y] = meshgrid([-1 0 1], [-1 0 1]);
uv = ones(size(x));
quiver(x, y, uv, uv);
```