## 2. Lineære ligningssystemer. Afsnit 2.1 – 2.3

$n$ lineære ligninger med $n$ ubekendte

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ ,$$

eller

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Simple varianter : $n = 1$ eller $n = 2$.

$\boldsymbol{A}$ er diagonal: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i = a_{ii}x_i$ . $x_i = b_i/a_{ii}$

$\boldsymbol{A}$ er ortogonal. Se nedenfor.

$\boldsymbol{A}$ er en trekant-matrix. Se nedenfor.



$n \times n$ matricen $\boldsymbol{Q}$ er ortogonal hvis $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ dvs hvis

$$\left(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\right)_{ij} = \boldsymbol{Q}^T_{:,i}\boldsymbol{Q}_{:,j} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \ , \\ 1 & \text{hvis } i = j \ . \end{cases}$$

M.a.o: en orthogonal matrix har ortonormale søjler.

Nemt at løse et ligningssystem med ortogonal koefficient-matrix:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{b}$$

Vi skal altså blot multiplicere højresiden med den transponerede matrix.

Alternativ udledning

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{Q}_{:,1} + x_2\boldsymbol{Q}_{:,2} + \cdots + x_n\boldsymbol{Q}_{:,n} = \boldsymbol{b}$$

Multiplicér på begge sider med $\boldsymbol{Q}^T_{:,k}$ og udnyt ortonormaliteten

$$1 \cdot x_k = \boldsymbol{Q}^T_{:,k}\boldsymbol{b} \ , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$



I en nedre trekantmatrix $\boldsymbol{L}$ er alle elementerne over diagonalen lig med 0.
I en øvre trekantmatrix $\boldsymbol{U}$ er alle elementerne under diagonalen lig med 0.

Nemt at løse et ligningssystem hvor koefficient-matricen er en trekantmatrix.
Fx $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n &= c_1 \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ u_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

Vi vil antage, at alle $u_{ii} \neq 0$. Sidste ligning indeholder kun én ubekendt

$$x_n = c_n/u_{nn} \ .$$

Indsæt i næstsidste ligning og flyt det kendte bidrag over på højre side

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} = c_{n-1} - u_{n-1,n}x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_{n-1} = \left(c_{n-1} - u_{n-1,n}x_n\right)/u_{n-1,n-1}$$

Således fortsættes:



Algoritme til løsning af $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$. Tilbageløsning (Back substitution)

$$\begin{aligned} & x_n = c_n/u_{nn} \\ & \textbf{for } i = n{-}1, \ldots, 2, 1 \\ & \quad x_i = \left(c_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - u_{i,n}x_n\right)/u_{ii} \\ & \textbf{end} \end{aligned}$$

**Eksempel 2.4.**

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} \\ & & \frac{3}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ \frac{-0.1}{9} \\ \frac{5.7}{9} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_3 &= \tfrac{5.7}{9}/\tfrac{3}{9} = 1.9 \ , \\ x_2 &= \left(\tfrac{-0.1}{9} - \tfrac{5}{9} \cdot 1.9\right)/\tfrac{2}{3} = -1.6 \ , \\ x_1 &= (1.6 - 3 \cdot (-1.6) - 1 \cdot 1.9)/9 = 0.5 \ . \end{aligned}$$

MATLAB :

```
x(n) = c(n)/U(n,n);
for  i = n-1 :  -1 :  1
   x(i) = ( c(i) - U(i,i+1:n)*x(i+1:n) ) / U(i,i);
end
```

Lige så simpelt at løse $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ . Fremadløsning (Forward substitution)

## 2.2. Gauss elimination

Trin 1 : Omform $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ til $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ med samme løsning, $\boldsymbol{x}$

Trin 2 : Løs $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ (tilbageløsning)

Omformningen sker ved en følge af såkaldte elementar-operationer

$1^\circ$ Ombyt to ligninger, dvs rækker i matricen og højresiden.

$2^\circ$ Modificér en ligning ved at subtrahere et multiplum af en af de andre ligninger.

Algoritmen er

1. Modificér ligning $2, \ldots, n$ så $x_1$ er elimineret.
2. Modificér de modificerede ligninger $3, \ldots, n$ så også $x_2$ er elimineret.

$\vdots$

(n-1). Modificér den modificerede ligning $n$ så også $x_{n-1}$ er elimineret.

Hvis matricen er regulær, så er alle $u_{ii} \neq 0$ , dvs forudsætningen for at bruge tilbageløsning-algoritmen er opfyldt.



Til beskrivelsen (og til håndregning) er det en fordel at indføre en totalmatrix (engelsk: augmented matrix)

$$\boldsymbol{T} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) .$$

Den $i^{\text{te}}$ række i $\boldsymbol{T}$ repræsenterer den $i^{\text{te}}$ ligning.

**Eksempel.** Elementar-operation $1^\circ$

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 & = & 5 \end{array} \qquad \boldsymbol{T} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right) .$$

Ombyt de to ligninger. Vi skriver $\boldsymbol{T}_{1,:} \leftrightarrow \boldsymbol{T}_{2,:}$ og

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) = \left(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{c}\right)$$

"$\sim$" kan læses "har samme løsning som".



**Eksempel.** Elementar-operation $2^\circ$ Jf **Calculus**

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 & = & 900 \\ 3x_1 + 4x_2 & = & 960 \end{array} \qquad \boldsymbol{T} = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 900 \\ 3 & 4 & 960 \end{array}\right) .$$

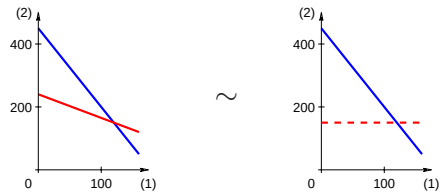
Vælg eliminations-koefficienten $\ell_{21} = \frac{3}{5} = 0.6$ og træk $\ell_{21}\boldsymbol{T}_{1,:}$ fra $\boldsymbol{T}_{2,:}$ .

Koefficienten til den modificerede 2. ligning bliver $3 - 0.6 \cdot 5 = 0$ .

Den modificerede 2. ligning erstatter den gamle.

Vi skriver $\boldsymbol{T}_{2,:} \leftarrow \boldsymbol{T}_{2,:} - \ell_{21}\boldsymbol{T}_{1,:}$ (dynamisk lighedstegn) og

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 900 \\ 3 & 4 & 960 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 900 \\ 0 & 2.8 & 420 \end{array}\right) = \left(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{c}\right)$$

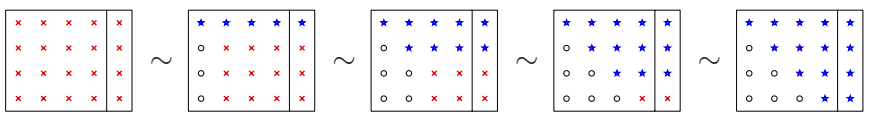





Resumé: Trin 1: $\boldsymbol{T} = \left(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right) \sim \left(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{c}\right)$

Trin 2: Løs $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ (vha tilbageløsning)

Trin 1: Successiv elimination af $x_k$ fra ligning $k{+}1, \ldots, n$



$\times$ : Element i aktive del af systemet

$\star$ : Element i $\left(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{c}\right)$

Værktøj: Elementar-operationer, som ikke ændrer løsningen

$1^\circ$ Ombyt to ligninger, dvs rækker i $\boldsymbol{T}$.

$2^\circ$ Modificér en ligning ved at subtrahere et multiplum af en af de andre ligninger.

NB: Værdierne ændres undervejs. $a_{ij}$ betegner den aktuelle værdi af $(\boldsymbol{T})_{ij}$

Ad $1^\circ$ Ombytning er nødvendig hvis $a_{kk} = 0$ . Pivotering forøger nøjagtigheden af den beregnede løsning: Før nul-stilling i $k^{\text{te}}$ søjle bestemmes

$$p_k \ : \quad |a_{p_k,k}| = \max\{|a_{kk}|, \ldots, |a_{nk}|\} \ .$$

Hvis $p_k > k$, så ombyt $p_k^{\text{te}}$ og $k^{\text{te}}$ ligning.

Ad $2^\circ$ $\boldsymbol{T}_{i,:} \leftarrow \boldsymbol{T}_{i,:} - \ell_{ik}\boldsymbol{T}_{k,:}$ , hvor $\ell_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ er den såkaldte eliminations-koefficient. Nye koefficient til $x_k$ i den $i^{\text{te}}$ ligning:

$$a_{ik} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kk} \ = \ 0 \ .$$

Vi slap altså af med bidrag fra $x_k$ .

Pivotering medfører, at alle $|\ell_{ik}| \leq 1$ .
Uden pivotering er der risiko for, at bidraget $-\ell_{ik}\boldsymbol{T}_{k,:}$ "drukner" informationen i den "gamle" $i^{\text{te}}$ ligning.



Algoritmisk formulering:

**for** $k = 1, 2, \ldots, n{-}1$
  find $p_k$ : $\quad |a_{p_k,k}| \ = \ \max\limits_{i=k+1,\ldots,n} |a_{i,k}|$
  **if** $a_{p_k,k} \neq 0$ **then**
    **if** $p_k \neq k$ **then** $\boldsymbol{T}_{k,:} \leftrightarrow \boldsymbol{T}_{p_k,:}$ **end**
    **for** $i = k{+}1, \ldots, n$
      $\ell_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
      $\boldsymbol{T}_{i,:} \leftarrow \boldsymbol{T}_{i,:} - \ell_{ik}\boldsymbol{T}_{k,:}$
    **end**
  **end**
**end**

Kun hvis matricen $\boldsymbol{A}$ er singulær kan det ske, at $a_{p_k,k} = 0$ .
Da er alle $a_{kk} = \ \cdots \ = a_{nk} = 0$ , og vi går blot videre til næste søjle.



**Eksempel 2.6.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0.8 \\ 4 & 2 & 1 & 0.7 \\ 9 & 3 & 1 & 1.6 \end{array}\right) \underset{p_1 = 3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 1.6 \\ 4 & 2 & 1 & 0.7 \\ 1 & 1 & 1 & 0.8 \end{array}\right) \underset{\substack{\ell_{21} = \frac{4}{9} \\ \ell_{31} = \frac{1}{9}}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 1.6 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{0.1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{5.6}{9} \end{array}\right) \underset{\substack{p_2 = 2 \\ \ell_{3,2} = 1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 1.6 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{-0.1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{5.7}{9} \end{array}\right)$$



## 2.3. Fuldstændig løsning pp 26 – 28

Hvis matricen $\boldsymbol{A}$ er regulær, er alle $u_{ii} \neq 0$, og løsningen $\boldsymbol{x}$ er éntydig.

Et singulært system afsløres af, at en eller flere $u_{ii} = 0$.
Vi vil nøjes med at diskutere det tilfælde, hvor all $u_{ii} \neq 0$, bortset fra $u_{nn} = 0$.

Den sidste ligning i $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ har da formen $0 \cdot x_n = c_n$ .
Hvis $c_n \neq 0$ , er der ingen løsning.

Hvis $c_n = 0$ , kan vi vælge $x_n = \alpha$ , hvor $\alpha$ er et vilkårligt reelt tal. Resten af løsningen findes som sædvanligt:

**for** $i = n{-}1, \ldots, 2, 1$
  $x_i \ = \ (c_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - u_{i,n}x_n)\,/u_{ii}$
**end**

**Eksempel 2.8.**

$$\left(\boldsymbol{A} \;\middle|\; \boldsymbol{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 20 \\ 7 & 8 & 9 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 9 & 32 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{12}{7} & \frac{24}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha \\ x_2 &= (\tfrac{24}{7} - \tfrac{12}{7}\alpha)/\tfrac{6}{7} \;=\; 4 - 2\alpha \\ x_1 &= (32 - 8{\cdot}(4 - 2\alpha) - 9\alpha)/7 \;=\; \alpha \end{aligned}$$

Dvs $\quad \boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{x}_b + \alpha \boldsymbol{w} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$

MATLAB :

```
>> x = A \ b
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 2.203039e-018.
x = -0.7997     U = 7.0000    8.0000    9.0000          c = 32
     5.5995            0    0.8571    1.7143               3.4286
    -0.7997            0         0   -1.5862e-016          2.2204e-016
```

`U(3,3)` $\neq 0$ og `c(3)` $\neq 0$ på grund af afrundingsfejl



Generelt har den fuldstændige løsning formen $\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_b + \alpha \boldsymbol{w}$ ,
hvor $\alpha$ er et vilkårligt reelt tal.

Det følger af udledningen, at $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{b}$ ,
og $\boldsymbol{w}$ er løsning til det homogene system $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ . $\boldsymbol{w}$ tilhører nulrummet for $\boldsymbol{A}$.
Når $u_{nn}$ er det eneste 0-element på diagonalen af $\boldsymbol{U}$, er $\boldsymbol{w}$ en basis for nulrummet.



Vi valgte $w_n = 1$ og derfor gælder

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} \;&=\; w_1 \boldsymbol{A}_{:,1} + \cdots + w_{n-1} \boldsymbol{A}_{:,n-1} + \boldsymbol{A}_{:,n} \;=\; \boldsymbol{0} \\ \Updownarrow \\ \boldsymbol{A}_{:,n} \;&=\; -w_1 \boldsymbol{A}_{:,1} - \cdots - w_{n-1} \boldsymbol{A}_{:,n-1} , \end{aligned}$$

og dermed

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \;&=\; x_1 \boldsymbol{A}_{:,1} + \cdots + x_{n-1} \boldsymbol{A}_{:,n-1} + x_n \boldsymbol{A}_{:,n} \\ &=\; (x_1 - w_1 x_n) \boldsymbol{A}_{:,1} + \cdots + (x_{n-1} - w_{n-1} x_n) \boldsymbol{A}_{:,n-1} . \end{aligned}$$

Billedrummet for $\boldsymbol{A}$ udspændes i dette tilfælde af de første $n-1$ søjler i $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en løsning hvis og kun hvis $\boldsymbol{b}$ tilhører billedrummet for $\boldsymbol{A}$.

For en regulær matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gælder

☺ Billedrummet er lig med $\mathbb{R}^n$.
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en éntydig løsning for enhver $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

☺ Nulvektoren $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ er den eneste løsning til det homogene system $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$