Ekstrema og numerisk differentiering

Jeppe Revall Frisvad

November 2009

Ekstrema (fællesbetegnelse for maksima og minima)

- Betingelserne for at ekstrema eksisterer:
  - Tilstrækkelig betingelse for globalt ekstremum:

    Hvis f er en kontinuert funktion defineret på et lukket og begrænset interval $[a, b]$, så har f et globalt maksimum og et globalt minimum i $[a, b]$.
  - Nødvendig betingelse for lokalt ekstremum:

    Hvis funktionen f har et lokalt ekstremum i et indre punkt c og hvis $f'(c)$ eksisterer, så er $f'(c) = 0$.
- Kritiske punkter som kan afsløre ekstrema:
  - Alle punkter c hvor $f'(c) = 0$.
  - Alle punkter c hvor $f'(c)$ ikke eksisterer.
  - Alle endepunkterne i definitionsmængden for f.

Maksimum og minimum

- Differentialkvotientens betydning (repetition):
  - En funktion f aftager ved et punkt c, når $f'(c) < 0$.
  - En funktion f tiltager ved et punkt c, når $f'(c) > 0$.
- Tilstrækkelige betingelser for et lokalt minimum:
  - En kontinuert funktion har lokalt minimum i punktet c, hvis funktionen aftager til venstre for c og tiltager til højre for c.
  - Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, så har f et lokalt minimum i punktet c.
- Tilstrækkelige betingelser for et lokalt maksimum:
  - En kontinuert funktion har lokalt maksimum i punktet c, hvis funktionen tiltager til venstre for c og aftager til højre for c.
  - Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, så har f et lokalt maksimum i punktet c.

Numerisk differentiering

- En funktion repræsenteres numerisk ved en række punkter.
- Punkterne ligger på funktionens graf. De er en diskret tilnærmelse til funktionen.
- I MATLAB kan følgende vektorer (med $n = 10$ elementer) betragtes som en numerisk repræsentation af en funktion $C(t)$:

```
t = [1 2 3 4 5 6 8 10 12 14];
C = [0.38 0.73 0.91 0.97 0.97 0.92 0.71 0.53 0.40 0.30];
```

- For `i` $= 1, \ldots, n$, antages `[t(i), C(i)]` at være et punkt på funktionens graf.
- Den numeriske tilnærmelse til funktionens afledte:

$$\frac{dC}{dt} \approx \frac{\Delta C}{\Delta t} = \left(\frac{C_2 - C_1}{t_2 - t_1}, \ldots, \frac{C_n - C_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) .$$

MATLAB's differens-funktion

- MATLAB har en indbygget funktion `diff`, som tager en vektor og returnerer differensen mellem på hinanden følgende elementer i vektoren:

```
>> t = [1 2 3 4 5 6 8 10 12 14];
>> diff(t)
ans =
     1     1     1     1     1     2     2     2     2
```

- Dette svarer til $\Delta t = (t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1})$.
- `diff` svarer altså til Δ.
- Vi kan derfor finde en numerisk tilnærmelse til en funktions afledte i MATLAB v.h.a. `diff`:

```
dCdt = diff(C)./diff(t);
```

- Men hvilke `t`-værdier svarer `dCdt`-værdierne til?

  Med andre ord: Hvor placerer vi punkterne for den numeriske tilnærmelse til funktionens afledte?

Central differens

- Vi kan finde en numerisk tilnærmelse til en funktions afledte i MATLAB v.h.a. `diff`:

```
dCdt = diff(C)./diff(t);
```

- Men hvilke `t`-værdier svarer `dCdt`-værdierne til?
- En tilnærmet værdi for den afledte funktion ($\frac{dC}{dt}$) beregnes v.h.a. to punkter. F.eks. `[t(i), C(i)]` og `[t(i+1), C(i+1)]`.
- Det bedste bud på hvilken `t`-værdi, der hører til den beregnede værdi må være `t`-værdien midt mellem `t(i+1)` og `t(i)`.
- D.v.s. at `t`-værdierne, der bedst svarer til `dCdt`-værdierne, er

$$t_i + \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i) \quad , \quad \text{for } i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

- Den numeriske tilnærmelse til den afledte for en funktion $C(t)$ er altså givet ved de 2 vektorer:

$$t_{1:n-1} + \frac{1}{2}\Delta t \quad \text{og} \quad \frac{\Delta C}{\Delta t} \ .$$

Lineær interpolation mellem datapunkter

- En funktions numeriske repræsentation er diskret.
- Noget information er udeladt, for vi har ikke alle punkter langs funktionens graf.
- Hvordan tilnærmer vi funktionsværdierne mellem punkterne?
- Den simpleste tilnærmelse: Brug en ret linie.
- Eksempel: Find en tilnærmelse til $C(2.5)$.

```
t = [1 2 3 4 5 6 8 10 12 14];
C = [0.38 0.73 0.91 0.97 0.97 0.92 0.71 0.53 0.40 0.30];
```

- Nærmeste punkter: (2, 0.73) og (3, 0.91).
- Linien mellem punkterne:
  - Hældning: $\frac{0.91-0.73}{3-2} = 0.18$
  - Skæring:
    $0.73 = 0.18 \cdot 2 + C_0 \quad \Leftrightarrow \quad C_0 = 0.73 - 0.18 \cdot 2 = 0.37$.
  - Ligning: $C = 0.18t + 0.37$.
  - Punkt: $C(2.5) = 0.18 \cdot 2.5 + 0.37 = 0.82$.