3. Egenværdiproblemer $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n$

Antag, at vi kan vælge n lineært uafhænge egenvektorer for $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, og lad

$$\boldsymbol{V} \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \qquad \text{dvs } \boldsymbol{V}_{:,j} = \boldsymbol{v}_j$$

Så er

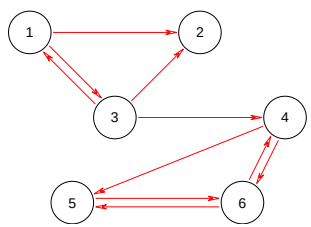
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \;=\; \boldsymbol{V}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \;=\; \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}$$

Forudsætningen om lineært uafhængige søjler i $\boldsymbol{V}$ medfører, at $\boldsymbol{V}$ er regulær, og $\boldsymbol{V}^{-1}$ eksisterer. Der gælder derfor

$$\boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1} \;\; \text{(faktorisering)} \qquad\qquad \boldsymbol{\Lambda} \;=\; \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} \;\; \text{(diagonalisering)}$$

Hvis $\boldsymbol{A}$ er symmetrisk, kan vi vælge ortonormale egenvektorer.
Da er $\boldsymbol{V}$ en ortogonal matrix, og $\quad \boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^T$

3.2.3. PageRank i Google



Fundne links sorteret efter deres "værdi"

Simulerer opførslen af en surfer på nettet.

Side i har PageRank p_i. "Nedarves" til børnene — lige meget til hver.

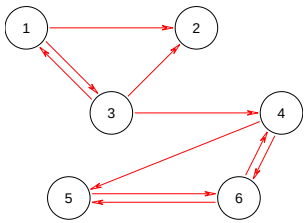
n sider. $n \times n$ matrix $\boldsymbol{H}$, hvor søjler repræsenterer "forældre" og rækker repræsenterer "børn".
Alle elementer lig nul, bortset fra $h_{ij} = 1/q_j$, hvor side i er barn af side j, som har q_j børn.

$$\boldsymbol{H} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Side 2 er barnløs. Hængende (dangling) side. Kan ikke komme videre derfra.

Surfer: Vælg tilfældigt blandt alle sider.
$\boldsymbol{H}$ modificeres til $\boldsymbol{S}$ med $\boldsymbol{S}_{:,j} = \frac{1}{n}\boldsymbol{e}$ hvis $q_j = 0$

$$\boldsymbol{S} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Bemærk, at alle $s_{ij} \geq 0$ og i alle søjler er $s_{1j} + \cdots + s_{nj} = 1$. Matricen opfylder betingelserne i Fact 5° (s. 44), og har derfor $\lambda = 1$ som en af egenværdierne.

Surferen vil ikke hele tiden følge et link fra den aktuelle side. Somme tider vælges en ny side tilfældigt. Antag, at dette sker med sandsynlighed $1-\alpha$ hvor $0 < \alpha < 1$, og at alle sider har sandsynlighed $\frac{1}{n}$ for at blive valgt.

Dette modelleres ved at $\boldsymbol{S}$ ændres til Google matricen $\quad \boldsymbol{G} \;=\; \alpha\,\boldsymbol{S} + \dfrac{1-\alpha}{n}\boldsymbol{E}$

Også $\boldsymbol{G}$ har $\lambda = 1$: $\quad g_{ij} = \alpha s_{ij} + \dfrac{1-\alpha}{n} > 0, \quad g_{1j} + \cdots + g_{nj} = \alpha \cdot 1 + \dfrac{1-\alpha}{n} \cdot n = 1$

Nu til PageRank: Den i^{te} side arver $g_{ij}p_j$ fra den j^{te} side, og får i alt

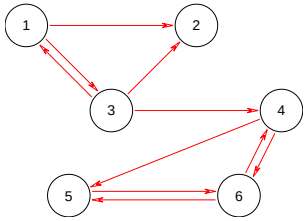
$$g_{i1}p_1 + g_{i2}p_2 + \cdots + g_{in}p_n \;=\; p_i \;, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

I matrix-vektor notation $\qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{p} \;=\; \boldsymbol{p}$

PageRank værdierne er altså elementer i egenvektoren hørende til egenværdien 1.

Resultat afhænger af α , men ikke ret meget

α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	0.116	0.102	0.085	0.064	0.037
	0.145	0.133	0.115	0.090	0.054
$\boldsymbol{p}$	0.124	0.111	0.093	0.071	0.042
	0.176	0.181	0.187	0.195	0.206
	0.199	0.213	0.230	0.254	0.286
	0.239	0.262	0.290	0.326	0.375



Enighed om, at de tre øverste links skal være til side 6, 5, 4.
Google bruger $\alpha = 0.85$ (?)

Eksempel 3.11. Problem: $n > 10^{10}$. Umuligt at beregne egenværdierne for $\boldsymbol{G}$.

$\lambda = 1$ er den numerisk største egenværdi for $\boldsymbol{G}$. Brug potensmetoden :

Vælg $\boldsymbol{p}^{[0]}$. Beregn $\boldsymbol{p}^{[k]} = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{p}^{[k-1]}$, $k = 1, 2, \ldots, K$

$\boldsymbol{p}^{[50]}$ vil være en tilstrækkeligt god tilnærmelse til $\boldsymbol{p}$.

Mere end 10^{20} elementer g_{ij}, som alle er forskellige fra nul.

$\boldsymbol{H}$: sparse matrix, nøjes med at lagre ikke-nuller, (i, j, h_{ij}) . Overkommeligt.

$\boldsymbol{S}$: Behøver ikke at lagre $\boldsymbol{S}_{:,j} = \frac{1}{n}\boldsymbol{e}$ for "hængende sider". Fuld information, hvis vi gemmer j-værdierne. $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \dfrac{x_j}{n}\boldsymbol{e}$

$\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} + \dfrac{1-\alpha}{n}\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} + \dfrac{1-\alpha}{n}\boldsymbol{e}$, idet vi sørger for, at $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} = x_1 + \cdots + x_n = 1$

4.3. Singulær værdi dekomposition (SVD)

$m \times n$ matrix $\boldsymbol{F}$, $m \geq n$. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^T$

$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$, hvor $\{\boldsymbol{u}_j\}$ er ortonormale m-vektorer.

Venstre singulære vektorer

$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$, hvor $\{\boldsymbol{v}_j\}$ er ortonormale n-vektorer.

Højre singulære vektorer

$\boldsymbol{\Sigma}$ $n \times n$ diagonal matrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

De singulære værdier $\{\sigma_j\}$ er ordnet så
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p > 0$,
$\sigma_{p+1} = \cdots = \sigma_n = 0$

Søjlerne i $\boldsymbol{V}$ udgør en ortonormal basis i $\mathbb{R}^n$.

Hvis vi supplerer søjlerne i $\boldsymbol{U}$ med $\boldsymbol{u}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m$, som er indbyrdes ortonormale og alle er ortogonale med $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, haves en ortonormal basis i $\mathbb{R}^m$

Brug regneregler: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^T = \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T + \cdots + \sigma_n\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{v}_n^T$

$\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_j = 0$ for $j \neq k$ og $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{v}_j = 1$ medfører

$\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}_j = \sigma_j\boldsymbol{u}_j$ ☺ simpel sammenhæng mellem basisvektorer i de to rum

$\boldsymbol{v}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ udgør en ortonormal basis for nulrummet for $\boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ udgør en ortonormal basis for billedrummet for $\boldsymbol{F}$

Vilkårlig $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V}\,\tilde{\boldsymbol{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\tilde{\boldsymbol{x}} = \sigma_1\tilde{x}_1\boldsymbol{u}_1 + \sigma_2\tilde{x}_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \sigma_p\tilde{x}_p\boldsymbol{u}_p$$

Mindste kvadrater: m-vektor $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{r}}$, hvor $\hat{\boldsymbol{y}}$ er komposanten i billedrummet:

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \tilde{y}_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \tilde{y}_p\boldsymbol{u}_p\ , \quad \tilde{y}_j = \boldsymbol{u}_j^T\boldsymbol{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}\,\tilde{\hat{\boldsymbol{x}}} \qquad \text{med} \quad \tilde{\hat{x}}_j = \begin{cases} \boldsymbol{u}_j^T\boldsymbol{y}/\sigma_j & j = 1, 2, \ldots, p \\ \alpha_j & j = p{+}1, \ldots, n\ . \end{cases}$$

Vilkårlig α_j

$\|\hat{\boldsymbol{x}}\| = \|\tilde{\hat{\boldsymbol{x}}}\|$. $\alpha_j = 0$ giver minimum norm løsning

Eksempel 4.8. Kvadratisk system $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ med singulær matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^T = \begin{pmatrix} 0.215 & 0.887 & 0.408 \\ 0.521 & 0.250 & -0.816 \\ 0.826 & -0.388 & 0.408 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16.848 & & \\ & 1.068 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.480 & -0.777 & -0.408 \\ 0.572 & -0.076 & 0.816 \\ 0.665 & 0.625 & -0.408 \end{pmatrix}$$

Nulrum udspændes af $\boldsymbol{v}_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 38.573 \\ -0.323 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boldsymbol{y} \text{ ligger i billedrummet}$$

Minimum norm løsningen er $\hat{\boldsymbol{x}}_{\min} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. $\|\hat{\boldsymbol{x}}_{\min}\| \simeq 2.309$

`x = A\y` giver en advarsel om singulært system og afleverer $\boldsymbol{x} \simeq \begin{pmatrix} -0.800 & 5.600 & -0.800 \end{pmatrix}$

$\|\boldsymbol{x}\| \simeq 5.713$. Der gælder $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}_{\min} + 5.225\boldsymbol{v}_3$

Anden brug af SVD:

Principal component analysis (PCA)

$$\boldsymbol{F} \;=\; \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T + \cdots + \sigma_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{v}_n^T$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots$ viser, at jo større j, jo mindre bidrager $\boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T$ til $\boldsymbol{F}$

Tilnærmelsen $\boldsymbol{F} \;\simeq\; \boldsymbol{F}_k \;=\; \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T + \cdots + \sigma_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^T \;=\; \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{\Sigma}_k \boldsymbol{V}_k^T$

vil i visse tilfælde indeholde stort set al relevant information i $\boldsymbol{F}$

Eksempel 4.11. Bruges bl.a. i sundhedsundersøgelser til at finde ud af, hvilke kombinationer af parametre (fx alder, vægt, rygevaner, ...), der er bedst til at beskrive variationer i observerede data.

I søgemaskiner som Google kan der være en række i $\boldsymbol{F}$ for hver side, og en søjle pr muligt søgeord. Der gælder $m > 10^{10}$ og n og k er måske $50\,000$ og 200.

En given forespørgsel udtrykkes ved sine koordinater $\boldsymbol{x}$ mht søgeordene, og vi finder denne vektors koordinater mht $\boldsymbol{V}_k$. De koordinater som er større end en vis tærskelværdi, udpeger "hits" via de tilsvarende $\boldsymbol{u}_j$