Taylorudvikling

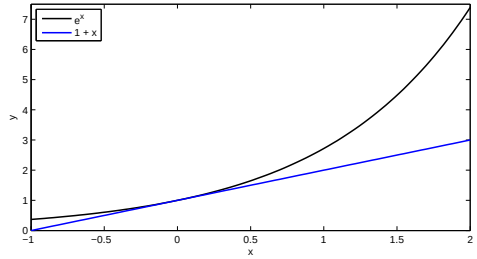
Jeppe Revall Frisvad

November 2009

Polynomiel approximation af differentiable funktioner

- Eksempel på en differentiabel funktion:

$$y = f(x) = e^x \ .$$



- Den simpleste tilnærmelse er lineær approksimation:

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)\,,$$

som er en tilnærmelse til funktionen $f(x)$ i omegnen af a.
- Eksempel: Tilnærmelse til $f(x) = e^x$ i omegnen af $a = 0$:

$$y = P_1(x) = 1 + x \ .$$

Taylor approximation

- Betragt en C^n funktion $f(x)$ i omegnen af $x = a$.
- $f(a)$ har n differentialkvotienter af orden $1, \ldots, n$:

$$f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots, f^{(n)}(a) \ .$$

- Taylor vil finde et polynomium $P_n(x)$, som er en god tilnærmelse til $f(x)$ i omegnen af $x = a$.
- Først placeres polynomiet så $P_n(a) = f(a)$.
- Det betyder: $P_n(x) \to f(x)$ for $x \to a$.
- Taylors idé er at sørge for:

$$P_n'(a) = f'(a), P_n''(a) = f''(a), \ldots$$

for så mange differentialkvotienter som muligt.
- For man kan vise at
  - jo flere differentialkvotienter de har til fælles,
  - jo *hurtigere* sker: $P_n(x) \to f(x)$ for $x \to a$.

Taylorpolynomiet

- Et n'te ordens polynomium er givet ved

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \ .$$

- Vi skal sørge for at $P_n(a) = f(a)$, det gøres ved at sætte:

$$P_n(x) = f(a) + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \ldots + b_n(x - a)^n \ .$$

- Så skal vi sørge for $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ for $k = 1, \ldots, n$:
  - Først: $P_n'(a) = b_1 = f'(a)$
  - Dernæst: $P_n''(a) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 = f''(a) \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{f''(a)}{2}$
  - Generelt: $P_n^{(k)}(a) = k! b_k = f^{(k)}(a) \quad \Rightarrow \quad b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$
- Taylorpolynomiet er altså:

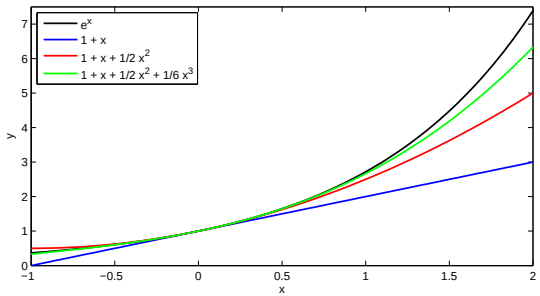
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \ .$$

Taylorudvikling

- En C^n funktion $f(x)$ kan altså fremstilles som et polynomium:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \ ,$$

  hvor $a_0, \ldots, a_n$ er koefficienterne i Taylorpolynomiet i omegn af $a = 0$ og $\epsilon(x)$ er fejlen i Taylor approximationen.
- Dette kaldes en n'te ordens Taylorudvikling af $f(x)$.
- Eksempel: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$



Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Er blodets farve ens i vener og arterier?
- Iltmætning beskriver i hvor høj grad hæmoglobin proteinerne i blodet er oxygeneret (bundet til ilt).
- Iltmætningen i arterieblod $S_a O_2$ (ca. 99%) er større end iltmætningen i veneblod $S_v O_2$ (ca. 75%).
- Hæmoglobins absorptionsspektrum ændrer sig med blodets iltmætning.
- Absorption og spredning af lys er bestemmende for et materiales farve.
- Blodets farve er dermed ikke ens i vener og arterier.
- Konklusion: Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.

$$\text{Beskrevet i koncentrationer:} \quad SO_2 = \frac{c_{HbO_2}}{c_{HbO_2} + c_{Hb}} \ .$$

- Men hvordan gør man?

Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.
- Lys attenueres eksponentielt i et transparent materiale (Bouguer-Lamberts lov)

$$L = L_0 e^{-\sigma_a s} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\ln \frac{L}{L_0} = \sigma_a s \ ,$$

  hvor L_0 er lyset, der kommer ind i materialet, L er lyset, der kommer ud, σ_a er absorptionskoefficienten og s er afstanden lyset har bevæget sig gennem materialet.
- Hvis materialet indeholder partikler, spredes lyset under overfladen og attenueringen bliver mere kompliceret end $\sigma_a s$.
- Vi opretter en attenueringsfunktion $A(\sigma_a)$ og skriver

$$A(\sigma_a) = -\ln \frac{L}{L_0} \ .$$

Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.
- Vi opretter en attenueringsfunktion $A(\sigma_a)$ og skriver

$$A(\sigma_a) = -\ln \frac{L}{L_0} \ .$$

- A er ukendt, så lad os tilnærme den med en Taylorudvikling:

$$\begin{aligned} A(\sigma_a) &= A(\sigma_a^0) + A'(\sigma_a^0)(\sigma_a - \sigma_a^0) + \frac{A''(\sigma_a^0)}{2}(\sigma_a - \sigma_a^0)^2 + \ldots \\ &\approx A_0 + A'(\sigma_a^0)\sigma_a = A_0 + \langle S \rangle \sigma_a \ , \end{aligned}$$

  hvor $\langle S \rangle$ er den gennemsnitlige stilængde, som lyset bevæger sig gennem materialet.
- Absorption og attenuering er funktion af lysets bølgelængde, d.v.s.

$$A(\lambda) \approx A_0(\lambda) + \langle S \rangle \sigma_a(\lambda) \ .$$

Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.
- Absorption og attenuering er funktion af lysets bølgelængde, d.v.s.

$$A(\lambda) \approx A_0(\lambda) + \langle S \rangle \sigma_a(\lambda) \ .$$

- A_0 er ukendt, så lad os tilnærme den med en Taylorudvikling:

$$\begin{aligned} A_0(\lambda) &= A_0(\lambda_0) + A_0'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + A_0''(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \\ &\approx c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 \ . \end{aligned}$$

- Desuden kan absorptionskoefficienten σ_a skrives som en lineær kombination af spektret for deoxygeneret hæmogoblin $\sigma_{a,Hb}(\lambda)$ og spektret for oxygeneret hæmogoblin $\sigma_{a,HbO_2}(\lambda)$:

$$\sigma_a(\lambda) = c_{Hb}\sigma_{a,Hb}(\lambda) + c_{HbO_2}\sigma_{a,HbO_2}(\lambda) \ .$$

- Attenueringsfunktionen bliver [Stratonnikov og Loschenov 2001]:

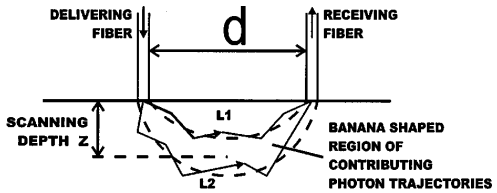
$$A(\lambda) \approx c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \langle S \rangle (c_{Hb}\sigma_{a,Hb}(\lambda) + c_{HbO_2}\sigma_{a,HbO_2}(\lambda)) \ .$$

Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.
- Attenueringsfunktionen bliver [Stratonnikov og Loschenov 2001]:

$$A(\lambda) \approx c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \langle S \rangle (c_{Hb}\sigma_{a,Hb}(\lambda) + c_{HbO_2}\sigma_{a,HbO_2}(\lambda)) \ .$$

- Vi har altså en ligning med 5 ubekendte til at beskrive attenueringen af lys fra kilde til måleinstrument.



- De 2 absorptionsspektra $\sigma_{a,Hb}$ og σ_{a,HbO_2} er kendt for et udvalg af bølgelængder λ_i, $i = 1, \dots, n$.

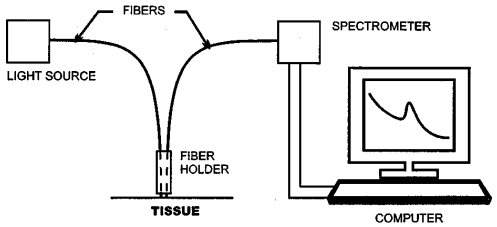
Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.
- Attenueringsfunktionen bliver [Stratonnikov og Loschenov 2001]:

$$A(\lambda) \approx c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \langle S \rangle (c_{Hb}\sigma_{a,Hb}(\lambda) + c_{HbO_2}\sigma_{a,HbO_2}(\lambda)) \ .$$

- De 2 absorptionsspektra $\sigma_{a,Hb}$ og σ_{a,HbO_2} er kendt for et udvalg af bølgelængder λ_i, $i = 1, \dots, n$.

- Man kan konstruerer et måleapparat, som måler $A(\lambda_i)$ for de udvalgte bølgelængder, $i = 1, \dots, n$.



Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.
- Attenueringsfunktionen bliver [Stratonnikov og Loschenov 2001]:

$$A(\lambda) \approx c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \langle S \rangle (c_{Hb}\sigma_{a,Hb}(\lambda) + c_{HbO_2}\sigma_{a,HbO_2}(\lambda)) \ .$$

- De 2 absorptionsspektra $\sigma_{a,Hb}$ og σ_{a,HbO_2} er kendt for et udvalg af bølgelængder λ_i, $i = 1, \dots, n$.
- Man kan konstruerer et måleapparat, som måler $A(\lambda_i)$ for de udvalgte bølgelængder.

- Når mere end 5 bølgelængder betragtes, fås et overbestemt ligningssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \sigma_{a,Hb}(\lambda_1) & \sigma_{a,HbO_2}(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \sigma_{a,Hb}(\lambda_2) & \sigma_{a,HbO_2}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \sigma_{a,Hb}(\lambda_n) & \sigma_{a,HbO_2}(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \langle S \rangle c_{Hb} \\ \langle S \rangle c_{HbO_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\lambda_1) \\ A(\lambda_2) \\ \vdots \\ A(\lambda_n) \end{bmatrix} .$$

Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Vi kan bruge et vævs udseende til at estimere blodets iltmætning SO_2 i vævet.
- Når mere end 5 bølgelængder betragtes, fås et overbestemt ligningssystem:

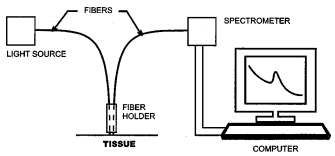
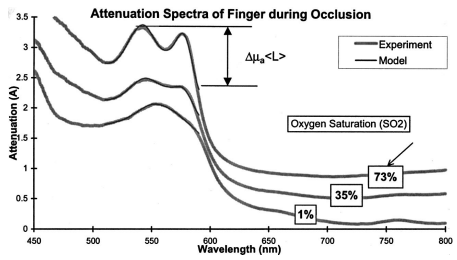
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \sigma_{a,Hb}(\lambda_1) & \sigma_{a,HbO_2}(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \sigma_{a,Hb}(\lambda_2) & \sigma_{a,HbO_2}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \sigma_{a,Hb}(\lambda_n) & \sigma_{a,HbO_2}(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \langle S \rangle c_{Hb} \\ \langle S \rangle c_{HbO_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\lambda_1) \\ A(\lambda_2) \\ \vdots \\ A(\lambda_n) \end{bmatrix} .$$

- Mindste kvadraters løsning kan findes med \ i MATLAB.
- Med løsningen har vi c_0, c_1, c_2, $\langle S \rangle c_{Hb}$ og $\langle S \rangle c_{HbO_2}$, og vi finder

$$SO_2 = \frac{c_{HbO_2}}{c_{HbO_2} + c_{Hb}} = \frac{\langle S \rangle c_{HbO_2}}{\langle S \rangle c_{HbO_2} + \langle S \rangle c_{Hb}} .$$

Anvendelse: Måling af iltmætning *in vivo*

- Følgende er altså et apparat, som kan installeres på et hospital til måling af vævs iltmætning *in vivo*:



- Apparatet måler lysets attenueringsspektrum fra kilde til måler og bruger en model baseret på Taylorudvikling og mindste kvadraters metode til at estimere vævets iltmætning.