Grænseværdier

Jeppe Revall Frisvad

November 2009

Hvad er en talfølge?

- Værdierne af en funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ opstillet i rækkefølge.
- Sættes $a_n = f(n)$, skrives talfølgen som

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

  eller kort som $\{a_n\}$.
- Eksempler på talfølger:
  - Følgen $\{a_n\}$ med $a_n = (-1)^{n+1}$ er

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

  - Følgen $\{a_n\}$ med $a_n = n^2$ er

$$0, 1, 4, 9, 16, \ldots$$

Grænseværdier for talfølger

- En talfølges grænseværdi for $n \to \infty$ findes ved indsættelse af større og større n i a_n.
- Formelt er a grænseværdi for talfølgen $\{a_n\}$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq N \ .$$

- Vi skriver $a_n \to a$ for $n \to \infty$ eller $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
- Eksempler på grænseværdier:
  - Grænseværdien for følgen $\{a_n\}$ med $a_n = (n+1)^{-1}$ er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \ .$$

  - Grænseværdien for følgen $\{a_n\}$ med $a_n = (-1)^{n+1}$ er

$$\text{ikke eksisterende} \ .$$

Regneregler for grænseværdier

- For 2 talfølger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ antages det, at grænseværdierne $\lim_{n\to\infty} a_n$ og $\lim_{n\to\infty} b_n$ eksisterer. Da gælder følgende regler.
- Grænseværdier opfylder linearitetsbetingelserne:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (c a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n \ , \quad \text{hvor } c \in \mathbb{R}$$

- Andre regneregler for grænseværdier:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \ , \quad \text{såfremt } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Grænseværdier for rekursive formler

- En værdi $\hat{x}$ kaldes et *fikspunkt* for en funktion f, hvis

$$\hat{x} = f(\hat{x}) \ .$$

- En talfølge $\{a_n\}$ kan beskrives rekursivt ved

$$a_0 = c \, , \quad a_{n+1} = f(a_n) \ .$$

- Hvis følgen $\{a_n\}$ er konvergent, må grænseværdien a for følgen være et fikspunkt for funktionen f.
- Fikspunkter findes ved løsning af ligningen $a = f(a)$
- Hvis $|f'(a)| < 1$, er a en grænseværdi for $\{a_n\}$ for passende begyndelsesværdier c.
- Eksempel: Fikspunkter for følgen $\{a_n\}$ med $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ er $a = 0$ og $a = 3$. Grænseværdien er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \, , \quad \text{idet } \left(\sqrt{3a}\right)' = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{a}} \ .$$

Eksponentiel vækst

- Eksponentiel vækst er givet ved

$$N_t = N_0 R^t \ ,$$

  hvor R er vækstkonstanten og N_0 er befolkningens størrelse til tiden $t = 0$.
- Den rekursive formel for eksponentiel vækst er

$$N_{t+1} = RN_t \ .$$

- Forholdet mellem forældre og afkom er altid konstant for eksponentiel vækst:

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R} \ .$$

- For en voksende befolkning er forholdet mindre end 1.

Begrænset vækst

- I omgivelser, som har en *kapacitet* til at huse K individer, er forholdet mellem forældre og afkom ikke konstant.
- I stedet er forholdet en ret linie, så befolkningen aftager, hvis den overstiger kapaciteten:

$$\frac{N_t}{N_{t+1}} = \frac{1}{R} + \frac{1 - 1/R}{K} N_t \ .$$

- Omskrevet til en rekursiv vækstmodel:

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \frac{R-1}{K} N_t} \ .$$

- Denne formel kaldes Beverton-Holt modellen og den kan bruges til at beskrive begrænset vækst.
- $N = K$ er fikspunkt og grænseværdi for Beverton-Holt modellen.

Kaotisk vækst

- Vækstkonstant R og kapacitet K er 2 parametre, som ofte bruges til at formulere vækstmodeller.
- Vækstmodeller som beskriver kompliceret dynamik:
  - Den logistiske ligning:

$$N_{t+1} = N_t \left(1 + R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) \ .$$

  - Rickers logistiske ligning:

$$N_{t+1} = N_t e^{R\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)} \ .$$

- Disse modeller bruges i vidt omfang til at beskrive mikro-organismers vækst.

Ubestemte Udtryk

- Ubestemte udtryk optræder, når vi prøver at finde en grænseværdi, men får en af følgende resultater:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \text{el.lign.}$$

- Eksempler:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{3x^3-2x^2},$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x, \quad \lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2+x}\right), \quad \lim_{x\to 0^+} x^x \ .$$

L'Hospitals regel

- Antag at f og g er differentiable funktioner.
- Antag endvidere at

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

eller

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \ .$$

- Da gælder

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ .$$

- Med andre ord: Vi kan bruge differentiation til at finde grænseværdier for ubestemte udtryk.

Eksempler

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} 2\sin x = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{3x^3-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-3}{9x^2-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{18x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \ .$$

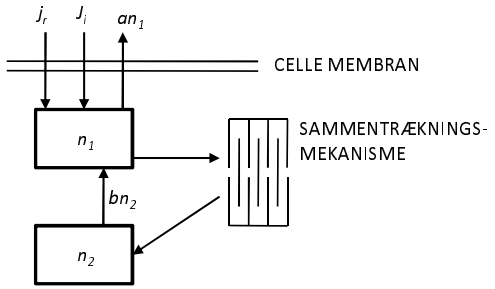
$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \sqrt{1+1/x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sqrt{1+1/x}}{1/x} = \cdots = -\frac{1}{2} \ .$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp(\ln x^x) = \lim_{x\to 0^+} \exp(x \ln x) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} x \ln x\right) = \exp(0) = 1 \ .$$

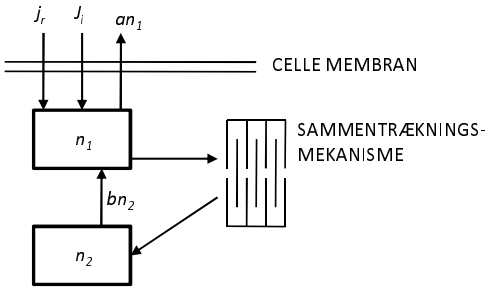
Anvendelse 1: Muskelkontraktion

- Calcium udvekslingsmodel som beskriver pattedyrs hjertefunktion [Manring and Hollander 1971].
- Modelleres på celleniveau med en 2-rums model, hvor n_1 og n_2 er calcium stofmængden for de respektive rum.
- Følgende medtages i modellen:
  - Calcium influx pr. aktionspotentiale J_i.
  - Calcium influx i hviletilstand j_r.
  - Aktivt calcium efflux $j_{10} = an_1$, hvor $a \in [0,1]$.
  - Intracellulær calciumudveksling $j_{21} = bn_2$, hvor $b \in [0,1]$.



Anvendelse 1: Muskelkontraktion

- Calcium udvekslingsmodel som beskriver pattedyrs hjertefunktion [Manring and Hollander 1971].



- Modellen beskrives som funktion af interval T mellem hjerteslag.
- For at måle om modellen er korrekt *in vitro*, må man finde værdier for $T \to \infty$. Her bruges l'Hospitals regel.

Anvendelse 2: Fagterapi

- Anvendelse af vira som dræber bakterier [Kasman *et al. 2002*].
- For at opnå effekt må M viruspartikler angribe hver bakteriecelle i en periode på t minutter.
- Hvis N bakterieceller har inficeret et volumen V, behøves følgende antal viruspartikler:

$$P = \frac{MN}{1 - \exp(-k_a tN/V)} \ ,$$

  hvor k_a er absorptionsraten.
- Overraskende nok skal næsten det samme antal viruspartikler bruges til at behandle 10^6 bakterieceller, som til at behandle 10 bakterieceller.
- Det rette antal til behandling kan derfor findes som nedre grænseværdi (v.h.a. l'Hospitals regel):

$$\lim_{N \to 0} P = \lim_{N \to 0} \frac{MN}{1 - \exp(-k_a tN/V)} = \frac{MV}{tk_a} \ .$$