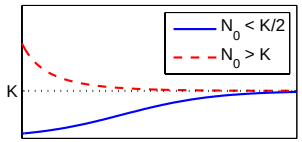
C, afsnit 8.2. Ligevægte og deres stabilitet

I mange modeller for biologiske og medicinske fænomener er man interesseret i at finde ligevægte, dvs tilstande, hvor der er balance mellem vækst og henfald.

Hvad sker der, hvis systemet forstyrres ? Vil det søge tilbage mod ligevægten ?
Så siges ligevægten at være stabil. Ellers er den ustabil.

Eksempel: Logistik ligningen $N' = rN(1-N/K)$
har to ligevægte, $N = 0$ og $N = K$.
Intuitivt er den første ligevægt ustabil, mens den anden er stabil.



Diskussionen er kun relevant for autonome differentialligninger

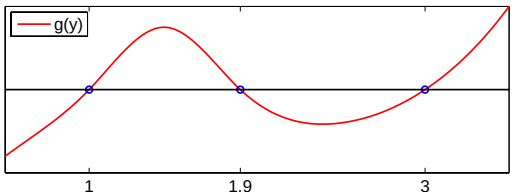
$$y' = g(y) \quad \text{for} \quad x > a\,, \quad y(a) = y_0$$

Vi vælger en startbetingelse, og derefter passer systemet sig selv.

En ligevægt $\hat{y}$ er åbenbart en rod for g , $g(\hat{y}) = 0$

Hvad sker der, hvis vi forstyrrer systemet fra $y = \hat{y}$ til $y = \hat{y} + z$?

Grafisk:



Tre ligevægte. Lad δ være et lille, positivt tal. Fra grafen ser vi, at

$y'(1-\delta) < 0$, $y'(1+\delta) > 0$: Løsning bevæger sig væk fra $\hat{y} = 1$

$y'(1.9-\delta) > 0$, $y'(1.9+\delta) < 0$: Løsning bevæger sig tilbage mod $\hat{y} = 1.9$

$y'(3-\delta) < 0$, $y'(3+\delta) > 0$: Løsning bevæger sig væk fra $\hat{y} = 3$

Ligevægten $\hat{y} = 1.9$ er stabil; de to andre er ustabile

Analytisk: Brug Taylors formel, $g(\hat{y}+z) \simeq g(\hat{y}) + zg'(\hat{y})$ for små $|z|$

$$\frac{d}{dx}(\hat{y}+z) = \frac{dz}{dx} = g(\hat{y}+z) \simeq g(\hat{y}) + zg'(\hat{y}) = \lambda z$$

Udnyttet, at $g(\hat{y}) = 0$ og indført $\lambda = g'(\hat{y})$

Løsning (x regnes fra det tidpunkt, hvor forstyrrelsen blev påført)

$$z(x) = z(0)\,e^{\lambda x}$$

$\lambda = g'(\hat{y}) < 0$: $|z(x)|$ aftager exponentielt. $\hat{y}$ er en stabil ligevægt.

$\lambda = g'(\hat{y}) > 0$: $|z(x)|$ vokser. $\hat{y}$ er en ustabil ligevægt.

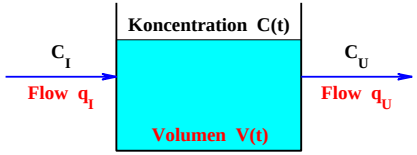
Logistik ligningen: $g(N) = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, $g'(N) = r\left(1 - \frac{2N}{K}\right)$

$g'(0) = r > 0$. $\hat{N} = 0$ er ustabil. $g'(K) = -r < 0$. $\hat{N} = K$ er stabil.

Compartment–modeller

optræder meget ofte i medicin mm:

8.2.2. Ét compartment. Bassin med volumen $V = V(t)$.
Tilstrømning: q_I ℓ/s opløsning af et stof; koncentration C_I g/ℓ



Masse bevares: ÆNDRING = IND – UD

Pr tidsenhed $\frac{dV}{dt} = q_I - q_U$ og $\frac{d(CV)}{dt} = q_I C_I - q_U C_U$.

Perfekt blanding $\Rightarrow$ $C_U = C = C(t)$.

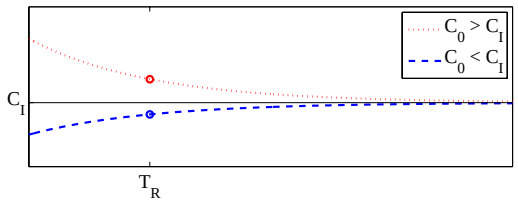
Antag $q_U = q_I = q$ $\Rightarrow$ V er konstant og $\frac{dC}{dt} = \frac{q}{V}(C_I - C)$, $C(0) = C_0$

Løsning $C(t) = C_I\left(1 - (C_0/C_I)\,e^{-(q/V)t)}\right)$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{q}{V}(C_I - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad C = C_I$$

Én ligevægtstilstand.



Løsning $\quad C(t) = C_I\left(1 - (C_0/C_I)\,e^{-(q/V)t)}\right)$ $\qquad$ Der gælder $q > 0,\ V > 0$

og derfor $\quad C(t) \to C_I\,(1 - (C_0/C_I)\cdot 0) = C_I$ for $t \to \infty$ $\quad$ uanset C_0

C_I er globalt stabil.

Forstyrrelse af systemet, fx ved at skifte (noget af) vandet ud. Ny C_0.

Hvor lang tid går der før ligevægten genopnås ? $\qquad$ Svar: ∞ lang tid.

Definér T_R ("retur tid"): $\quad C(T_R) - C_I = e^{-1}\,(C(0) - C_I) \quad \cdots\cdots \quad T_R = V/q$.

Jo større V eller jo mindre q, jo større T_R. Intuitivt korrekt. ☺

Princippet $\quad$ ÆNDRING = IND − UD $\quad$ bruges ofte ved opstilling af modeller.

"S – I – R model" pp 510 – 513. Epidemi–model. Dansk: U–S–R model

Population $\quad N(t) = S(t) + I(t) + R(t) = N \quad$ konstant

$S(t)$ Udsatte. Hvert individ har smitterisiko $b \cdot I(t)$. b er en konstant

$I(t)$ Smittede. Hvert individ har chancen a for at blive rask. a er en konstant

$R(t)$ Raske; immune overfor smitte

Model $\quad \boxed{S} \xrightarrow{\Delta S} \boxed{I} \xrightarrow{\Delta R} \boxed{R} \qquad \Delta I = \Delta S - \Delta R$

$$\frac{dS}{dt} = -bIS\ , \qquad \frac{dR}{dt} = aI\ , \qquad \frac{dI}{dt} = bIS - aI$$

Kontrol: $\quad N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = -bIS + (bIS - aI) + aI = 0$ ☺

System af tre samhørende, ulineære differentialligninger.

Skal løses med kendte start-værdier, $S(0),\ I(0),\ R(0)$

$$S' = -bIS\ , \qquad I' = bIS - aI\ , \qquad R' = aI$$

Forudsætter $a,\ b,\ S(0),\ I(0) > 0$

Smitten breder sig hvis $\quad I'(0) = I(0)\big(bS(0) - a\big) > 0$, dvs hvis

$$R_0 = \frac{b\,S(0)}{a} > 1 \qquad R_0 \text{ kaldes "basic reproductive rate"}$$

Afhænger af antal udsatte, $S(0)$; hvor smittefarlig sygdommen er, b, og hvor hurtigt man bliver rask, a. Hvis $S(0) < a/b$, er der ingen risiko.

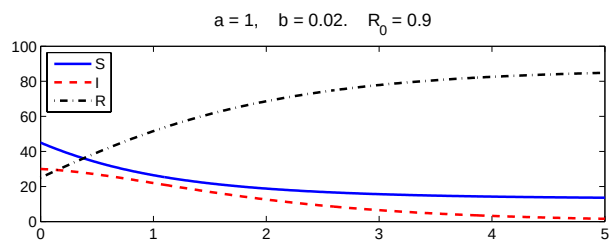
$R(t)$ monotont voksende. Derfor $\quad \dfrac{dS}{dR} = \dfrac{dS}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dR} = -bIS\cdot\dfrac{1}{aI} = -\dfrac{b}{a}\,S$

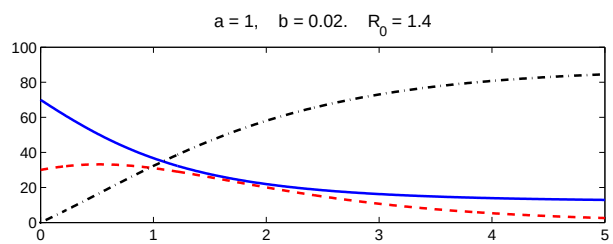
Løsning: $\quad S(t) = S(0)\,e^{-(b/a)R(t)} \geq S(0)\,e^{-(b/a)N} > 0$

Antal udsatte falder med tiden, men der vil altid være nogle usmittede tilbage.

Før eller senere: $\quad S(t) < a/b$, og $I'(t) = I(t)\big(bS(t) - a\big) < 0$, dvt $I(t)$ aftager

Enheder: $\quad a \sim (\text{tid})^{-1}\ , \qquad b \sim (\text{antal}\cdot\text{tid})^{-1}$



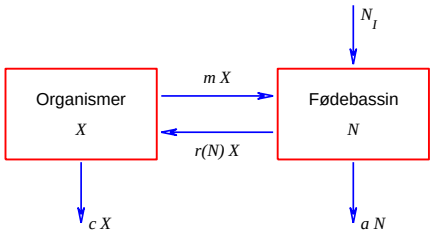


I begge tilfælde $\quad N = 100\ , \qquad I(0) = 30$

Compartment modeller pp 501 – 503, 513 – 515, 731 – 734

Organismer lever af føde. Nogle organismer dør og vender tilbage til fødelageret; andre forsvinder helt.

Brug ÆNDRING = IND – UD på hver compartment



$$\frac{dN}{dt} = N_I + mX - aN - r(N)X\ , \qquad \frac{dX}{dt} = r(N)X - (m+c)X$$

Diskussionen pp 513 – 515 forudsætter $r(N) = bN$, og vi får det ulineære system

$$N' = N_I - aN - (bN - m)X\ , \qquad X' = (bN - m - c)X$$

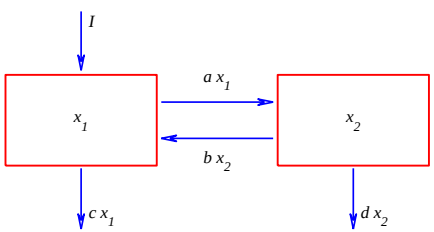
Ligevægt: $N'(t) = X'(t) = 0$. Opfyldt hvis $X = 0$ og $N = N_I/a$ eller

$$N = \frac{m+c}{b} \qquad \text{og} \qquad X = \frac{bN_I - a(m+c)}{bc}$$

Stabil — hvis den eksisterer; dvs hvis $bN_I > a(m+c)$

Compartment model, pp 731 – 734.

Flow af fx medicin mellem forskellige dele af kroppe. Koncentrationer x_1 og x_2. ÆNDRING = IND – UD ⇒



$$x_1' = I - (a+c)x_1 + bx_2$$
$$x_2' = ax_1 - (b+d)x_2$$

System af samhørende lineære differentialligninger, jf afsnit 3.2.1 i **LA**

Nøjes med at diskutere tilfældet $I = 0$. Ingen ny tilførsel i det tidsrum, vi betragter.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -(a+c)x_1 + bx_2 \\ ax_1 - (b+d)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a+c) & b \\ a & -(b+d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$$

$a,\ b, c,\ d \geq 0$. Forudsætter mindst én af dem positiv.

Ellers: Kun den trivielle løsning $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} =$ **konstant**

LA: $\boldsymbol{A}$ har ingen eller to egenværdier $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Rødder for det karakteristiske polynomium

$$P_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} -(a+c) - \lambda & b \\ a & -(b+d) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta\ ,$$

Hvor $\tau = -(a+b+c+d)$, $\quad \Delta = \det(\boldsymbol{A}) = (a+c)(b+d) - ab = ad + bc + cd$.

Diskriminant $\quad D = \tau^2 - 4\Delta = \big((a+c) + (b+d)\big)^2 - 4(a+c)(b+d) + 4ab$

$$= (a+c)^2 + (b+d)^2 + 2(a+c)(b+d) - 4(a+c)(b+d) + 4ab$$
$$= \big((a+c) - (b+d)\big)^2 + 4ab > 0$$

To reelle, forskellige egenværdier ☺ $\quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\tau + \sqrt{D}\right)$, $\quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\tau - \sqrt{D}\right)$

Løsning: $\quad x_1(t) = \alpha_{11}e^{\lambda_1 t} + \alpha_{12}e^{\lambda_2 t}$, $\quad x_2(t) = \alpha_{21}e^{\lambda_1 t} + \alpha_{22}e^{\lambda_2 t}$,

hvor koefficienterne α_{ij} bestemmes v.hj.a. begyndelsesbetingelserne $\boldsymbol{x}(0)$ og egenvektorerne for $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -(a+c) & b \\ a & -(b+d) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \tau &= -(a+b+c+d) \\ \Delta &= ad + bc + cd \\ D &= \tau^2 - 4\Delta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\tau + \sqrt{D}\right) \\ \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\tau - \sqrt{D}\right) \end{aligned}$$

$\tau < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 < 0$

$\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\tau + \sqrt{\tau^2 - 4D}\right) < \frac{1}{2}(\tau + |\tau|) = 0$

$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\ . \qquad x_i(t) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}e^{\lambda_2 t}$

$\Delta < 0$: Én negativ og én positiv egenværdi. ☹ Hvis $\alpha_{i1} > 0$, fås exponentiel vækst i i^{te} compartment

Example 3 (pp 735f) er en forenklet version af det medicin-problem, der behandles i **LA**, ex. 1.2, 1.5, 3.7, 4.6. Modellen svarer til $b = c = d = 0$, og dermed $\Delta = 0$, $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = 0$

Hvis $x_1(0) = K$, $x_2(0) = 0$, fås $x_1(t) = Ke^{-at}$, $x_2(t) = K\,(1 - e^{-at})$.