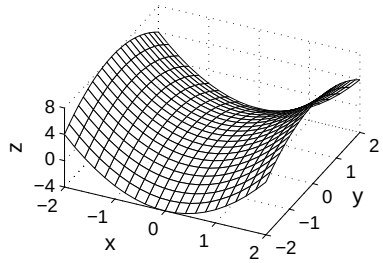
Funktioner af flere variable. C afsnit 10.1 pp 603 – 614

Funktion $z = f(x, y)$.

Eksempel (fig. 10.7) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$.

Viser grafen for f , en flade i det 3-dimensionale rum.



Til hver $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) : -2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\}$
svarer én værdi $f(x, y) \in \mathbb{R}$

x og y er de uafhængige variable. I anvendelser vil de ofte være begrænset af, at punkterne (x, y) skal ligge i domænet D , en afgrænset delmængde af $\mathbb{R}^2$.

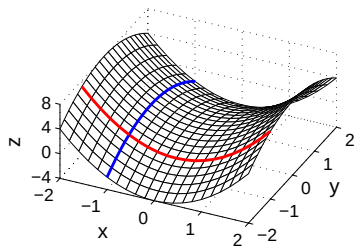
Værdimænden (range) er $\{w \in \mathbb{R} : f(x, y) = w$ for en $(x, y) \in D\}$

Generelt: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er en funktion af n variable. Fra lineær algebra genkender vi argumenterne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som elementer i en vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Vi skriver $f : D \mapsto \mathbb{R}$, hvor domænet $D \subset \mathbb{R}^n$ og
værdimænden er $\{w \in \mathbb{R} : f(\boldsymbol{x}) = w$ for en $\boldsymbol{x} \in D\}$

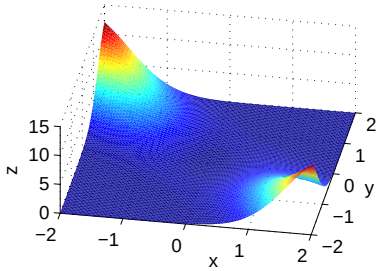
Hovedvægt på $n = 2$: lettest at forstå ☺
og vi kan tegne ☺

Figuren viser $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ for fastholdt x hhv fastholdt y .
$z = f(-1, y) = 2 - y^2$ er en parabel med grenene nedad, mens parablen
$z = f(x, -1) = 2x^2 - 1$ har grenene opad.



En niveaukurve for $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
er et sæt af punkter (x, y) , for hvilke
$f(x, y) = c$, en konstant.

Svarer til højdekurver på et landkort.

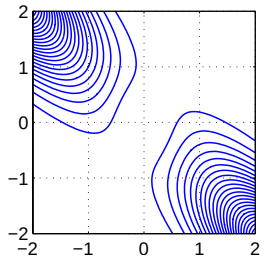


Eksempel. $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x+y)^2}$

Niveaukurver svarende til ækvidistante værdier,

$c = 0.5, 1, 1.5, \cdots, 11.5$.

Jo tættere niveaukurver, jo hurtigere varierer f



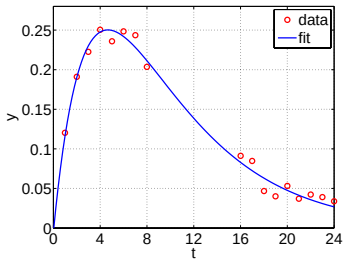
Eksempel 4.6 fra LA

Målt koncentration y_i af medicin i nyrerne til tiden t_i
efter indtagelse af medicinen; $i = 1, 2, \ldots, 17$.

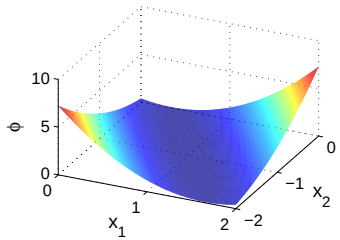
Fitte model $M(\boldsymbol{x}, t) = x_1 e^{-0.15t} + x_2 e^{-0.30t}$

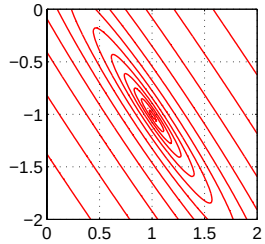
Ønsker at finde $\boldsymbol{x}$, så
$\phi(\boldsymbol{x}) = (y_1 - M(\boldsymbol{x}, t_1))^2 + \cdots + (y_{17} - M(\boldsymbol{x}, t_{17}))^2$
er så lille som muligt.
Svært at se, hvor minimum ligger ☺

Niveaukurver svarende til $c = 0.002 \cdot [1, 2, 4, \ldots, 2048]$



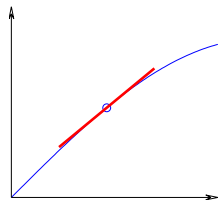
☺





Partielle afledede. C afsnit 10.3 pp 623 – 628

Lad g være en funktion af én variabel. Differentialkvotienten $g'(x)$ er hældningen af tangenten til grafen for g i punktet $(x,\ g(x))$. Den siger noget om den lokale variation af g .



Lad f være en funktion af to variable, x og y . De partielle aflede siger tilsvarende noget om, hvorledes f varierer mht x og y .

Definition

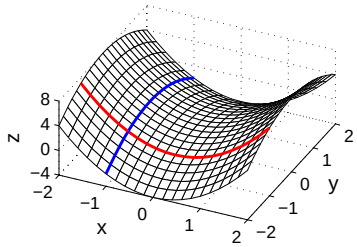
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

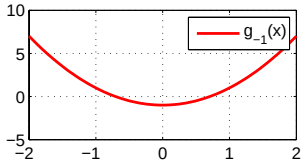
M.a.o: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ er den sædvanlige differentialkvotient af funktionen $g_y(x) = f(x,y)$, svarende til fastholdt y og varierende x. Tilsvarende: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{d\,g_x(y)}{dy}$

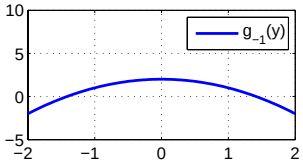
Eksempel. $f(x,y) = 2x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x\,, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$$

$$g_{-1}(x) = 2x^2 - 1\,, \quad g_{-1}(y) = 2 - y^2$$







Lad δ være et lille, positivt tal.

Hvis $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0$, så er $f(x+\delta,y) > f(x,y)$ og $f(x-\delta,y) < f(x,y)$

Hvis $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} < 0$, så er $f(x+\delta,y) < f(x,y)$ og $f(x-\delta,y) > f(x,y)$

Tilsvarende fortæller $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ om variationen i y-retningen.

Eksempel 4, side 627f. Rovdyr–byttedyr model. Der er N byttedyr. Rovdyret har angrebsfrekvens a, i løbet af tiden T spiser det P_e byttedyr, og det tager T_h tidsenheder at spise ét af dem.

Model $\quad P_e(N,T_h) = \dfrac{aNT}{1+aT_hN}$

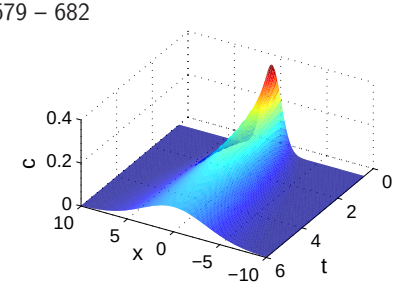
$$\frac{\partial P_e(N,T_h)}{\partial T_h} = -\frac{(aNT)(aN)}{(1+aT_hN)^2} < 0$$

$$\frac{\partial P_e(N,T_h)}{\partial N} = \frac{(aT)(1+aT_hN)-(aNT)(aT_h)}{(1+aT_hN)^2} = \frac{aT}{(1+aT_hN)^2} > 0$$

Fortegnene for de partielle afledede bekræfter intuitionen:

Jo større T_h, jo mindre P_e. Jo større N, jo større P_e

Diffusion. C afsnit 10.6.3 pp 679 – 682



Diffusionsligningen optræder i matematiske modeller for en række fænomener, fx

- opløsning af sukker i vand,
- frostnedtrængning i jord,
- spredning af forurening, ...

Funktion $c(x,t)$ af sted og tid.

Partiel differentialligning $\quad \dfrac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}$ $\qquad$ Diffusions konstant D

Løsning: $\quad c(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,e^{-x^2/(4Dt)}$. $\qquad$ Ses ved indsættelse (p 681)

Figuren svarer til $D=1$

$$c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,e^{-x^2/(4Dt)}$$

Samlet mængde: $\quad M(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} c(x,t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(4Dt)}dx$

Substitution $\quad x = u\sqrt{2Dt} \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{4Dt} = \dfrac{u^2}{2}$ og $dx = \sqrt{2Dt}\,du$

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\sqrt{2Dt}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = 1$$

(Fra staststik. Funktionen $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-u^2/2}$ er "Gauss-klokken", den normale fordelingsfunktion)

Den samlede mængde er altså den samme til alle tider. Spredes efterhånden.

$t \to 0$: mængden koncentreres i punktet $x=0$, $\quad c(0,t) \to \infty$ for $t \to 0$

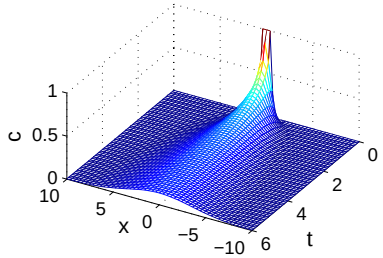
Matematisk fiktion

Mere realistisk

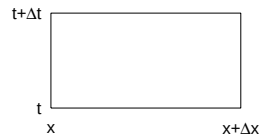
$$c(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |x| \le 0.5 \\ 0 & \text{for} \quad |x| > 0.5 \end{cases}$$

NB: $M(0)=1$. $\qquad$ Numerisk løsning.

Samme opførsel.



Udledning af diffusionsligningen
(lidt forskellig fra pp 679 – 680)



Molekyler bevæger sig langs x-aksen fra høj koncentration mod lavere.

Fick's lov: $\quad -D\,\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial x}\,\Delta t \;=\;$ antal molekyler som passerer x fra tiden t til $t+\Delta t$

$$\text{IND} \;=\; -D\,\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\,\Delta t. \qquad\qquad \text{UD} \;=\; -D\,\frac{\partial c(x+\Delta x,t)}{\partial x}\,\Delta t$$

Ændring af bidrag til mængden M

$$\Big(c(x,t+\Delta t)-c(x,t)\Big)\Delta x \;=\; \text{IND}-\text{UD} \;=\; D\Delta t\left(\frac{\partial c(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{c(x,t+\Delta t)-c(x,t)}{\Delta t} \;=\; \frac{D}{\Delta x}\left(\frac{\partial c(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right)$$

Grænseovergang $\Delta x, \Delta t \to 0$: $\qquad \dfrac{\partial c(x,t)}{\partial t} \;=\; D\,\dfrac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}$