# Rapport 3 projekt: Eksempel

Jeppe Revall Frisvad

November 2008

## Problemformulering

- Et lokalsamfund råder over en sø med kapacitet til en fiskebestand på $K = 1000$ fisk.
- Fiskene i søen har en vækstrate på $r = 2$.
- P.g.a. overfiskeri er bestanden nu på $N_0 = 200$ fisk.
- Lokalsamfundet vil derfor gerne udstede 50 licenser med tilhørende kvoter (Individual Fishing Quotes - IFQ).
- For at sikre fiskenes levevilkår, vil man gerne holde bestanden på 75% af søens kapacitet $\hat{N} = 750$.
- Opgaven er at finde den tilladelige årlige fangst (Total Allowable Catch - TAC) og derudfra IFQ.
- Ekstra: At finde den fiskebestand der i ligevægt optimere udbyttet.

## Vækstmodellen

- $N$ er antallet af voksne fisk
- $r$ er vækstraten
- $K$ er kapaciteten
- Fiskebestandens vækst følger den logistiske ligning:

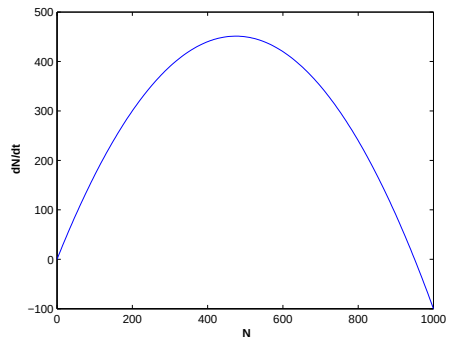
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad .$$

- Der fanges løbende $h$ fisk for hver voksen fisk i bestanden:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - hN \quad .$$

## Ligevægte (grafisk)

- Hvis $\frac{dN}{dt} = 0$, så er systemet i ligevægt.
- For forsøgs skyld tegner vi $\frac{dN}{dt}$ for $h = 0.1$:




- $\frac{dN}{dt} = 0$ er en parabel og har for $h = 0.1$ tydeligvis 2 ligevægte.

## Ligevægte (analytisk)

- Hvis $\frac{dN}{dt} = 0$, så er systemet i ligevægt.
- Analytisk fås:

$$\frac{dN}{dt} = r\hat{N}\left(1 - \frac{\hat{N}}{K}\right) - h\hat{N} = r\frac{\hat{N}}{K}\left(K - K\frac{h}{r} - \hat{N}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{N} = 0 \quad \text{eller} \quad \hat{N} = (1 - h/r)K \ .$$

- $\hat{N} = 0$ er grænsetilfældet.
- $\hat{N} = (1 - h/r)K = (1 - 0.1/2) \cdot 1000 = 950$ er hvad vi gætter på bestanden går imod for $h = 0.1$.

## Stykvis lineær udvikling

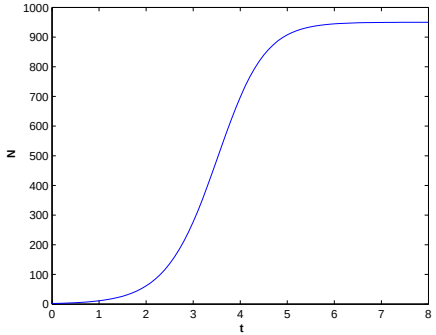
- Fra tidligere husker vi at:

$$N(t + \Delta t) \approx N(t) + \frac{dN}{dt}\Delta t \ .$$

- Ved indsættelse fra differentialligningen får vi

$$N(t + \Delta t) \approx N(t) + N(t)(r - rN(t)/K - h)\Delta t \ .$$

- MATLAB simulering med $N(0) = 2$ og $h = 0.1$ giver:




## Stabilitet

- Ligevægten $\hat{N} = 950$ for $h = 0.1$ ser stabil ud, hvordan kan vi vise det generelt?
- Hvis $\frac{dN}{dt} = g(N)$ og $\frac{dg}{dN}(\hat{N}) < 0$, så er ligevægten stabil.
- Vi har

$$g(N) = \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - hN \ .$$

$$\frac{dg}{dN} = r - h - 2r\frac{N}{K} \ .$$

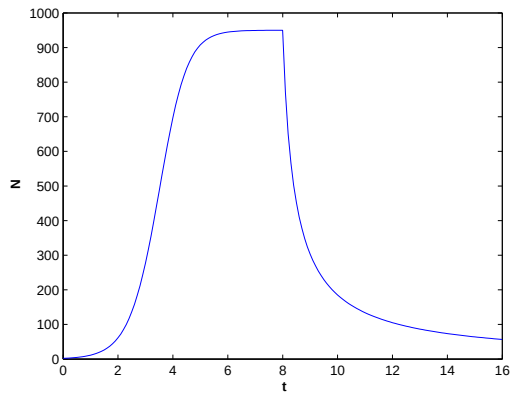
- Indsættes ligevægten $\hat{N} = (1 - h/r)K$ får vi

$$\frac{dg}{dN}(\hat{N}) = r - h - 2r(1 - h/r)K/K = h - r \ .$$

- D.v.s. ligevægten $\hat{N} = (1 - h/r)K$ er stabil for $r > h$ og ligevægten $\hat{N} = 0$ er stabil for $r < h$

## Simulation af overfiskeri

- Vi forestiller os at fangsten bliver sat op til $h = 2$
- og fortsætter simulationen fra før:



## Løbende fangst

- For at imødekomme ønsket om en bestand med ligevægt $\hat{N} = 750$, bruger vi

$$\hat{N} = (1 - h/r)K \quad \Rightarrow \quad h = r(1 - \hat{N}/K) \ .$$

  og finder $h = 2 \cdot (1 - 750/1000) = 0.5$.
- D.v.s. at fiskerne må løbende fange halvdelen af de voksne fisk de kan finde.
- Men det giver desværre ikke Total Allowable Catch - TAC.
- Problem: Modellen fortæller ikke hvor mange fisk, der er blevet fanget.

## Model med antal fangede fisk

- $F$ er antal fangede fisk.
- Modificeret model:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - hN \\ \frac{dF}{dt} &= hN \ . \end{aligned}$$

- På matrix-form:

$$\begin{bmatrix} \frac{dN}{dt} \\ \frac{dF}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1 - N/K) - h & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ F \end{bmatrix} \ .$$

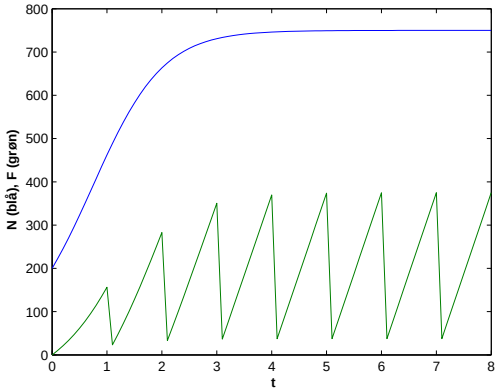
- Et ikke-lineært system som for cancer-modellen.
- Lad os kalde "ændringsmatricen" (transition matrix) for $A(N)$.

## Simulation med antal fangede fisk

- Som i Rapport 1 anvendes

$$\begin{bmatrix} N(t + \Delta t) \\ F(t + \Delta t) \end{bmatrix} = (A(N(t))\Delta t + I) \begin{bmatrix} N(t) \\ F(t) \end{bmatrix}$$

- Startværdierne er $[N(0) \ F(0)]^T = [200 \ 0]^T$
- $F$ aflæses og nulstilles ved hvert hele år. Det giver TAC.



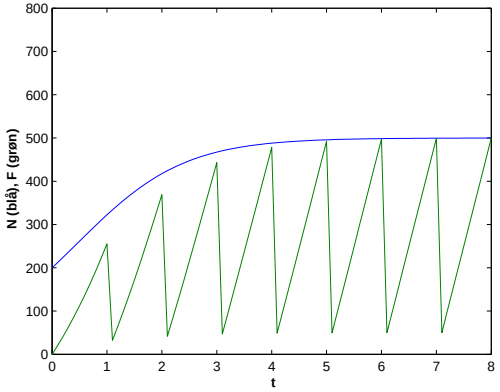

## Resultater

- Sø med fiskebestand:
  - Kapacitet $K = 1000$
  - Vækstrate $r = 2$
  - Startbestand $N_0 = 200$
  - Licenser $L = 50$
  - Ønsket bestand $\hat{N} = 750$
- Vi fandt løbende fangst pr. fisk: $h = 0.5$
- Dernæst den årligt tilladelige fangst TAC (nedenfor)
- Udregnet pr. licens giver det fiskerikvoten IFQ (nedenfor), som følger med en licens

| year | 1.0000 | 2.0000 | 3.0000 | 4.0000 | 5.0000 | 6.0000 | 7.0000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TAC | 156.3713 | 282.7605 | 350.6335 | 369.8293 | 373.9658 | 374.7958 | 374.9598 |
| IFQ | 3.1274 | 5.6552 | 7.0127 | 7.3966 | 7.4793 | 7.4959 | 7.4992 |

## Ekstra: Større udbytte

- Startværdierne er $[N(0)\ F(0)]^T = [200\ 0]^T$
- $F$ aflæses og nulstilles ved hvert hele år. Det giver TAC.
- Hvis $h = 1$ fås større udbytte, men mindre bestand i ligevægt.




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TAC | 255.3086 | 369.0072 | 443.2314 | 478.3108 | 492.1721 | 497.2366 | 499.0322 |
| IFQ | 5.1062 | 7.3801 | 8.8646 | 9.5662 | 9.8434 | 9.9447 | 9.9806 |