Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Vedrana Ališić

Teorija retrakata

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Andrej Dujella

Zagreb, lipanj 1999.

Predgovor

Teorija retrakata dio je topologije koji veže skupovnu i algebarsku topologiju. Ovaj rad ne ide u širinu, već obuhvaća najosnovnije postavke te teorije.

U prvom, uvodnom poglavlju iskazane su definicije i tvrdnje koje ćemo koristiti u glavnom tekstu. Retrakti i retrakcije definirani su u drugom poglavlju te su dokazana njihova invarijantna svojstva. Također su definirani pojmovi deformacijskog retrakta i okolinskog retrakta. U trećem se poglavlju bavimo apsolutnim ekstenzorima i apsolutnim okolinskim ekstenzorima za klasu prostora. Dokazan je Tietzeov teorem kojim dobivamo prvi netrivijalni primjer apsolutnog ekstenzora za klasu svih normalnih prostora. Da bismo dobili još primjera, proučavamo operacije na ekstenzorima i okolinskim ekstenzorima. Pojmove apsolutnog retrakta i apsolutnog okolinskog retrakta za klasu prostora definiramo u četvrtom poglavlju i pokazujemo njihovu vezu s apsolutnim ekstenzorima i apsolutnim okolinskim ekstenzorima za klasu prostora.

Pri pisanju ovog rada dragocjene su mi bile primjedbe mog mentora, doc. dr. sc. Andreja Dujelle, pa mu ovom prilikom srdačno zahvaljujem. Također zahvaljujem dipl. inž. Anti Turudiću na velikoj i nesebičnoj pomoći kod obrade teksta.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Napomenimo na početku da ćemo u cijelom tekstu izraz *prostor* koristiti za topološki prostor. Izraz *preslikavanje* koristit ćemo za neprekidnu funkciju, dok ćemo izraz *funkcija* koristiti ako ona nije neprekidna ili se neprekidnost tek treba dokazati.

Za prostor kažemo da je *diskretan* ako je svaki njegov podskup otvoren.

Za prostor X kažemo da je *indiskretan* ako su jedini njegovi otvoreni skupovi prazan skup $\emptyset$ i cijeli skup X.

Za prostor kažemo da je *metrizabilan* ako postoji metrika koja inducira njegovu topologiju.

Prostor zadovoljava *prvi aksiom prebrojivosti* ako familija okolina svake njegove točke ima prebrojivu bazu.

Prostor zadovoljava *drugi aksiom prebrojivosti* ako njegova topologija (familija svih otvorenih skupova) ima prebrojivu bazu.

Prostor je *Lindelöfov* ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima prebrojivi potpokrivač.

Prostor je *separabilan* ako sadrži prebrojiv gust podskup.

Ako prostor zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, tada:

(i) zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti,

(ii) je Lindelöfov,

(iii) je separebilan.

Za prostor X kažemo da je T_1*-prostor* ako za svake dvije točke $a, b \in X$, $a \neq b$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subset X$ takvi da je $a \in U$, $b \notin U$ i $b \in V$, $a \notin V$.

Prostor je T_1-prostor ako i samo ako je svaka njegova točka zatvoreni skup.

Za prostor X kažemo da je *Hausdorffov* ili T_2*-prostor* ako za svake dvije točke $a, b \in X$, $a \neq b$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subset X$ takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Za prostor X kažemo da je *regularan* ako za bilo koji zatvoren skup $A \subset X$ i točku $b \in X$, $b \notin A$, postoje otvoreni skupov $U, V \subset X$ takvi da je $A \subset U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Prostor je regularan ako i samo ako za svaku točku $a \in X$ i okolinu $U \subset X$, $a \in U$, postoji zatvorena okolina $A \subset X$, $a \in A$ takva da je $A \subset U$.

Za prostor kažemo da je T_3*-prostor* ako je regularan i T_1-prostor.

Za prostor X kažemo da je *potpuno regularan* ako za bilo koji zatvoren skup $A \subset X$ i točku $b \in X$, $b \notin A$, postoji preslikavanje $f : X \to [0,1]$ takvo da je $f(b) = 0$ i $f(A) = \{1\}$.

Prostor je potpuno regularan ako i samo ako za svaku točku $a \in X$ i okolinu $U \subset X$, $a \in U$, postoji preslikavanje $f : X \to [0,1]$ takvo da je $f(a) = 0$ i $f(X \backslash U) = \{1\}$.

Svaki potpuno regularan prostor je regularan.

Za prostor kažemo da je *Tihonovljev* ili $T_{3\frac{1}{2}}$*-prostor* ako je potpuno regularan i T_1-prostor.

Za prostor X kažemo da je *normalan* ako za bilo koje zatvorene skupove $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subset X$ takvi da je $A \subset U$, $B \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Prostor X je normalan ako i samo ako za bilo koje zatvorene skupove $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subset X$ takvi da je $A \subset U$, $B \subset V$ i $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Prostor X je normalan ako i samo ako za svaki zatvoreni skup $A \subset X$ i otvoreni skup $V \subset X$, $A \subset V$ postoji otvoreni skup U takav da je $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$.

Prostor X je normalan ako i samo ako za bilo koje otvorene skupove $U_1, U_2 \subset X$, $U_1 \cup U_2 = X$, postoje otvoreni skupovi $V_1, V_2 \subset X$, takvi da je $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$ i $V_1 \cup V_2 = X$.

Prostor X je normalan ako i samo ako za svaka dva zatvorena skupa $A, B \subset X$ postoji preslikavanje $f : X \to [0,1]$ takvo da je $f(A) = \{0\}$ i $f(B) = \{1\}$. (Urysohnova lema)

Za prostor kažemo da je T_4*-prostor* ako je normalan i T_1-prostor.

Pri tome vrijedi

$$\left\{\begin{matrix} T_4- \\ \text{prostori} \end{matrix}\right\} \subset \left\{\begin{matrix} \text{Tihonovljevi} \\ \text{prostori} \end{matrix}\right\} \subset \left\{\begin{matrix} T_3- \\ \text{prostori} \end{matrix}\right\} \subset \left\{\begin{matrix} \text{Hausdorffovi} \\ \text{prostori} \end{matrix}\right\} \subset \left\{\begin{matrix} T_1- \\ \text{prostori} \end{matrix}\right\}$$

i svaka od inkluzija je prava.

Svaki regularan Lindelöfov prostor je normalan.

Svaki T_4-prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti je metrizabilan.

Za prostor kažemo da je *kompletno normalan* ako je svaki njegov potprostor normalan.

Prostor X je kompletno normalan ako i samo ako za svaka dva skupa $A, B \subset X$, takva da je $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$, postoje otvoreni skupovi $U, V \subset X$ takvi da je $A \subset U$, $B \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Prostor je *kompaktan* ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač.

Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.

Svaka neprekidna slika kompaktnog (Lindelöfovog) prostora je kompaktan (Lindelöfov) prostor.

Prostor je *lokalno kompaktan* ako svaka njegova točka ima kompaktnu okolinu.

Svaki lokalno kompaktan Hausdorffov prostor je Tihonovljev.

Prostor je *povezan* ako nije unija dvaju nepraznih disjunktnih otvorenih skupova.

Prostor X je *putovima povezan* ako za bilo koje dvije točke $a, b \in X$ postoji preslikavanje $f : [0, 1] \to X$ takvo da je $f(0) = a$ i $f(1) = b$.

Topološki produkt familije topoloških prostora $\{X_\mu | \mu \in M\}$ je Kartezijev produkt

$$\prod_{\mu \in M} X_\mu = \left\{ f : M \to \bigcup_{\mu \in M} X_\mu \,\middle|\, f(\mu) \in X_\mu,\ \mu \in M \right\}$$

s najmanjom topologijom takvom da je za svaki $\mu \in M$ projekcija

$$P_\mu : \prod_{\mu \in M} X_\mu \to X_\mu,\ P_\mu(f) = f(\mu)$$

neprekidna. Podbazu te topologije čine svi skupovi oblika

$$\left\{ f \in \prod_{\mu \in M} X_\mu \,\middle|\, f(\mu) \in U_\mu,\ \mu \in M \right\},$$

gdje je U_μ otvoren skup u X_μ, a baza te topologije je familija svih konačnih presjeka skupova iz podbaze.

Topološka potencija X^M je topološki produkt familije jednakih prostora X.

Hilbertova kocka $I^{\mathbb{N}}$ je topološka potencija jediničnog intervala I, gdje je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva.

Poglavlje 2

Retrakti i njihova svojstva

2.1 Retrakti

Preslikavanjem $f : X \to Y$ i potprostorom $A \subset X$ jedinstveno je određeno preslikavanje $g : A \to Y$, takvo da je

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A\,.$$

Preslikavanje g nazivamo *restrikcija* (*suženje*) preslikavanja f na potprostor A i označavamo sa

$$g = f|A\,.$$

Preslikavanje f nazivamo *proširenje* (*ekstenzija*) preslikavanja g preko prostora X. Označimo li s $h : A \subset X$ inkluziju, $h(a) = a$, $\forall a \in A$, tada je relacija $g = f|A$ ekvivalentna relaciji $f \circ h = g$.

Problem proširenja bavi se pitanjem ima li dano preslikavanje $g : A \to Y$, definirano na potprostoru A prostora X, proširenje preko X. Specijalno, ako je $Y = A$ i $g = i$ (identiteta prostora A), tada dolazimo do važnog posebnog slučaja problema proširenja, kojeg nazivamo *problem retrakcije*.

Ako identiteta $i : A \to A$, ima proširenje $r : X \to A$, tada potprostor A nazivamo *retrakt* prostora X, a preslikavanje r nazivamo *retrakcija* prostora X na potprostor A i pišemo

$$r : X \supset A\,.$$

Drugim riječima, retrakcija prostora X na potprostor A od X je preslikavanje $r : X \to A$ takvo da vrijedi $r(a) = a$, $\forall a \in A$, a potprostor A je retrakt prostora X ako postoji retrakcija $r : X \supset A$.

Svaka retrakcija je očigledno surjekcija i kao takva čuva kompaktnost, povezanost i povezanost putem.

Primjeri retrakcija:

1. Za svaki prostor X, identiteta je očigledno retrakcija. Dakle, svaki prostor je sam sebi retrakt. S druge strane, za bilo koji jednočlani potprostor A prostora X, konstanta $X \to A$ je retrakcija. Dakle, svaki jednočlani potprostor prostora X je retrakt od X. Ove retrakte nazivamo *trivijalni retrakti* prostora X.

2. U n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ promatramo jediničnu n-kuglu E^n i njezin rub, jediničnu $(n-1)$-sferu S^{n-1}. Uzmemo li za prostor X jediničnu n-kuglu bez ishodišta, tada je S^{n-1} retrakt od X, a retrakcija $r : X \supset S^{n-1}$ dana je s

$$r(x) = \left(\frac{x_1}{|x|}, \ldots, \frac{x_n}{|x|} \right), \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in X\,.$$

   Kasnije ćemo dokazati da S^{n-1} nije retrakt od E^n.

3. Promatramo topološki produkt dvaju nepraznih prostora A i B,

$$X = A \times B\,.$$

   Izaberemo li čvrstu točku $b_0 \in B$, prostor A možemo shvatiti kao potprostor prostora X uz smještenje

$$h(a) = (a, b_0), \quad \forall a \in A\,.$$

   Tada je prirodna projekcija $X \to A$ očigledno retrakcija prostora X na prostor A. Specijalno, svaki meridijan torusa $T = S \times S$ je retrakt od T.

2.2 Adjunktni prostori

Za preslikavanje $g : A \to Y$ sa zatvorenog potprostora A prostora X u neki drugi prostor Y konstruirat ćemo adjunktni prostor. Promotrimo topološku sumu prostora X i Y,

$$W = X + Y\,.$$

W je unija disjunktnih skupova X i Y s topologijom definiranom ovako: U je otvoren skup u W ako i samo ako su $U \cap X$ i $U \cap Y$ otvoreni skupovi u X odnosno u Y. Sada svaki $x \in A$ poistovjetimo s $g(x) \in Y$. Kvocijentni prostor Z dobiven tim poistovjećivanjem nazivamo *adjunktni prostor* dobiven adjungiranjem prostora X prostoru Y pomoću danog preslikavanja $g : A \to Y$.

Neka je $p : W \to Z$ prirodna projekcija prostora W na kvocijentni prostor Z. Lako se vidi da je restrikcija $p|Y$ smještenje. Pomoću tog smještenja,

Y shvaćamo kao zatvoreni potprostor kvocijentnog prostora Z. Očigledno je $Y = Z$ ako i samo ako je $A = X$.

Neka je π bilo koje topološko svojstvo prostora. Kažemo da adjunktni prostor *čuva svojstvo* π ako Z ima svojstvo π kad god X i Y imaju svojstvo π.

Propozicija 2.2.1. *Adjunktni prostor Z čuva svojstvo biti T_1-prostor.*

Dokaz: Neka je z proizvoljna točka iz Z. Ako je $z \in Y$ tada je z zatvoren u Y pošto je Y T_1-prostor. Nadalje, Y je zatvoren u Z pa je i z zatvoren u Z. Ako $z \notin Y$ tada je inverzna slika $p^{-1}(z)$ prirodne projekcije $p : W \to Z$ jednočlan skup u $X \backslash A$ pa je zatvoren u X, a zbog toga i u W. Po definiciji topologije u Z, z je također zatvoren u Z. □

Propozicija 2.2.2. *Adjunktni prostor Z ne čuva uvijek svojstva:*

(i) biti Hausdorffov prostor,

(ii) biti regularan prostor,

(iii) biti potpuno regularan prostor.

Dokaz: Neka je X Tihonovljev prostor koji nije normalan, a Y neka je zatvoren jedinični interval realnih brojeva $I = [0, 1]$. Tada X i Y imaju svojstva *(i)-(iii)*. Pošto X nije normalan, postoje dva disjunktna zatvorena skupa B i C u X koja nemaju disjunktne okoline. Promotrimo zatvoren potprostor $A = B \cup C$ prostora X i preslikavanje $g : A \to Y$ definirano sa

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in B \\ 1, & x \in C\,. \end{cases}$$

Pokazat ćemo da adjunktni prostor dobiven adjungiranjem prostora X prostoru Y pomoću preslikavanja g nije Hausdorffov prostor. Pretpostavimo suprotno, tj. da je Z Hausdorffov prostor. Tada za dvije različite točke 0 i 1 postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V u Z takvi da je $0 \in U$ i $1 \in V$. Koristeći prirodnu projekciju $p : W \to Z$, dobivamo dva disjunktna otvorena skupa u prostoru X

$$p^{-1}(U) \cap X \quad \text{i} \quad p^{-1}(V) \cap X$$

od kojih prvi sadrži B, a drugi C, no to je kontradikcija pa Z nije Hausdorffov prostor. Zbog propozicije 2.2.1 prostor Z je T_1-prostor pa zaključujemo da ne može biti regularan niti potpuno regularan. Dakle, Z nema ni jedno od svojstava *(i)-(iii)*. □

Propozicija 2.2.3. *Adjunktni prostor Z čuva svojstva:*

(i) biti kompaktan prostor,

(ii) biti Lindelöfov prostor,

(iii) biti normalan prostor,

(iv) biti kompaktan Hausdorffov prostor.

Dokaz: (i) Prostor W je kompaktan jer je unija dvaju kompaktnih skupova X i Y. Dakle, prostor $Z = p(W)$, gdje je p prirodna projekcija $p : W \to Z$, je neprekidna slika kompaktnog prostora pa je također kompaktan.

(ii) Prostor W je Lindelöfov jer je unija Lindelöfovih prostora X i Y. Tada je prostor $Z = p(W)$ neprekidna slika Lindelöfovog prostora pa je također Lindelöfov.

(iii) Neka su F_1 i F_2 dva proizvoljna disjunktna zatvorena skupa u Z. Tada su $F_1 \cap Y$ i $F_2 \cap Y$ disjunktni zatvoreni skupovi u Y. Pošto je Y normalan, postoje otvoreni skupovi U_1 i U_2 u Y takvi da vrijedi

$$F_1 \cap Y \subset U_1 \quad \text{i} \quad F_2 \cap Y \subset U_2$$

i da su njihova zatvorenja $\overline{U_1}$ i $\overline{U_2}$ u Y disjunktna. Prostor Y je zatvoren u Z pa su $\overline{U_1}$ i $\overline{U_2}$ također zatvorenja skupova U_1 i U_2 u Z. Promotrimo zatvorene skupove u prostoru Z

$$K_1 = F_1 \cup \overline{U_1} \quad \text{i} \quad K_2 = F_2 \cup \overline{U_2}\,.$$

Tada su K_1 i K_2 disjunktni pa su

$$J_1 = p^{-1}(K_1) \cap X \quad \text{i} \quad J_2 = p^{-1}(K_2) \cap X$$

zatvoreni disjunktni skupovi u prostoru X. Pošto je X normalan, postoje disjunktni otvoreni skupovi V_1 i V_2 takvi da je

$$J_1 \subset V_1 \quad \text{i} \quad J_2 \subset V_2\,.$$

Promotrimo sada dva skupa u prostoru Z

$$G_1 = p(V_1 \backslash A) \cup U_1 \quad \text{i} \quad G_2 = p(V_2 \backslash A) \cup U_2\,.$$

Prvo ćemo dokazati da je $F_1 \subset G_1$. Neka je z proizvoljna točka iz F_1. Ako je $z \in Y$, tada je $z \in U_1 \subset G_1$. Ako $z \notin Y$, tada postoji jedinstvena točka $x \in X \backslash A$ takva da je $z = p(x)$. Pošto je $z \in F_1 \subset K_1$, mora biti $x \in J_1 \subset V_1$ pa je $x \in V_1 \backslash A$, a tada je $z \in p(V_1 \backslash A) \subset G_1$. Slično se dokazuje da je $F_2 \subset G_2$.

Sada ćemo dokazati da su G_1 i G_2 disjunktni. Imamo $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Također vrijedi $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, a preslikavanje $p|(X \backslash A)$ je smještenje pa je i

$p(V_1 \backslash A) \cap p(V_2 \backslash A) = \emptyset$. Nadalje, pošto je $U_1 \subset Y$, a $p(V_2 \backslash A) \subset Z \backslash Y$, imamo da je $U_1 \cap p(V_2 \backslash A) = \emptyset$. Slično, vrijedi da je $U_2 \cap p(V_1 \backslash A) = \emptyset$. Dakle,

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset\,.$$

Još treba pokazati da su G_1 i G_2 otvoreni skupovi u Z. Pokazat ćemo da je $p^{-1}(G_1)$ otvoren skup u W. Imamo

$$p^{-1}(G_1) \cap Y = G_1 \cap Y = U_1$$

pa je $p^{-1}(G_1) \cap Y$ otvoren skup u prostoru Y. S druge strane, pošto je $p^{-1}(U_1) \cap X = f^{-1}(U_1)$, imamo

$$p^{-1}(G_1) \cap X = (V_1 \backslash A) \cup f^{-1}(U_1)\,.$$

Skup $f^{-1}(U_1)$ je otvoren u A pa postoji otvoren skup H_1 u X takav da je

$$f^{-1}(U_1) = A \cap H_1\,.$$

Pošto je $p^{-1}(U_1) \cap X \subset J_1 \subset V_1$, također vrijedi

$$f^{-1}(U_1) = A \cap H_1 \cap V_1\,.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} p^{-1}(G_1) \cap X &= (V_1 \backslash A) \cup (A \cap H_1 \cap V_1) \\ &= (V_1 \backslash A) \cup (H_1 \cap V_1)\,. \end{aligned}$$

Skupovi $V_1 \backslash A$ i $H_1 \cap V_1$ su otvoreni u X pa je i $p^{-1}(G_1) \cap X$ otvoren skup u X. Time smo dokazali da je G_1 otvoren skup u Z. Slično se dokazuje da je G_2 otvoren skup u Z.

(iv) Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan pa tvrdnja slijedi iz *(i)*, *(iii)* i propozicije 2.2.1. □

2.3 Veza s problemom proširenja

Problem retrakcije je, kao što smo ga i definirali, poseban slučaj problema proširenja. Veza retrakta s problemom proširenja vrlo je jaka. S jedne strane, pojam retrakta daje nužne i dovoljne uvjete da bi problem proširenja bio trivijalan. Vrijedi, naime:

Propozicija 2.3.1. *Potprostor A prostora X je retrakt od X ako i samo ako za bilo koji prostor Y, svako preslikavanje $g : A \to Y$ ima proširenje preko X.*

Dokaz: Ako je A retrakt prostora X s retrakcijom $r : X \supset A$, tada je kompozicija $g \circ r : X \to Y$ proširenje od g preko X. Obrnuto, uzmimo $Y = A$. Tada identiteta $i : A \to A$ ima proširenje $r : X \to A$ pa je A retrakt od X. □

S druge strane, problem proširenja za dano preslikavanje $g : A \to Y$, definirano na zatvorenom potprostoru A prostora X, u neki drugi prostor Y možemo svesti na problem retrakcije pomoću adjungiranog prostora. Imamo:

Propozicija 2.3.2. *Potprostor Y adjungiranog prostora Z je retrakt od Z ako i samo ako dano preslikavanje $g : A \to Y$ ima proširenje preko X.*

Dokaz: Nužnost: Neka je $r : Z \supset Y$ retrakcija. Definiramo preslikavanje $f : X \to Y$ uzevši

$$f(x) = r[p(x)], \quad \forall x \in X\,,$$

gdje je p prirodna projekcija. Tada za svaki $x \in A$ imamo

$$f(x) = r[p(x)] = r[g(x)] = g(x)\,.$$

Dakle, f je proširenje danog preslikavanja g.

Dovoljnost: Neka je $f : X \to Y$ proširenje danog preslikavanja g. Za proizvoljnu točku $z \in Z$ definiramo funkciju $r : Z \to Y$ ovako: Ako $z \in Y$, neka je $r(z) = z$. Ako $z \notin Y$, tada postoji jedinstvena točka x iz $X \backslash A$ za koju je $p(x) = z$ pa neka je $r(z) = f(x)$.

Uzmimo sad $h = r \circ p$. Slijedi da je $h|X = f$, a da je $h|Y$ identiteta. Po teoremu o kombiniranju preslikavanja (vidi [3], str. 7) h je neprekidna funkcija, a p je prirodna projekcija pa je zbog topološke identifikacije r također neprekidna funkcija. Pošto je $r|Y$ identiteta po definiciji, slijedi da je r retrakcija. □

Dakle, problem proširenja za dano preslikavanje $g : A \to Y$ preko prostora X ekvivalentan je problemu retrakcije.

2.4 Idempotentna preslikavanja

Neka je X bilo koji prostor. Promotrimo skup $\Omega = \mathrm{Map}(X, X)$ svih preslikavanja skupa X u samoga sebe. Za bilo koja dva preslikavanja f i g iz Ω, kompozicija $g \circ f$ je definirana i također je preslikavanje iz Ω. Dakle, operacija $(f, g) \mapsto g \circ f$ definira asocijativno množenje u Ω. Idempotente ovog množenja nazivamo *idempotentna preslikavanja* prostora X. Drugim riječima, za preslikavanje $e : X \to X$ kažemo da je idempotentno ako je $e \circ e = e$.

Propozicija 2.4.1. *Ako je* $r : X \supset A$ *retrakcija, a s* $h : A \subset X$ *označimo inkluziju, tada je kompozicija* $e = h \circ r : X \to X$ *idempotentna.*

Dokaz: Pošto je r retrakcija, kompozicija $r \circ h$ je identiteta prostora A pa imamo

$$\begin{aligned} e \circ e &= (h \circ r) \circ (h \circ r) \\ &= h \circ (r \circ h) \circ r \\ &= h \circ i \circ r \\ &= h \circ r = e\,. \end{aligned}$$

Time smo dokazali da je e idempotentno. □

Dakle, svaka retrakcija prostora X je idempotentno preslikavanje ako je promatramo kao preslikavanje prostora X u samoga sebe. S druge strane, svako idempotentno preslikavanje prostora X je retrakcija ako ga promatramo kao preslikavanje iz X na njegovu sliku u X. Vrijedi, naime:

Propozicija 2.4.2. *Neka je* $e : X \to X$ *idempotentno preslikavanje i neka je* $A = e(X)$*. Tada je preslikavanje* $r : X \to A$ *definirano s* $r(x) = e(x)$, $\forall x \in X$*, retrakcija prostora* X *na* A*.*

Dokaz: Preslikavanje e je idempotentno, tj. vrijedi $e \circ e = e$. Neka je a proizvoljna točka iz A. Pošto je $A = e(X)$, postoji točka $x \in X$ za koju je $a = e(x)$ pa imamo

$$r(a) = e(a) = e[e(x)] = [e \circ e](x) = e(x) = a\,.$$

Time smo dokazali da je r retrakcija. □

Korolar 2.4.3. *Ako je* $e : X \to X$ *idempotentno preslikavanje, tada je slika* $e(X)$ *retrakt od* X*.*

Dokaz: Iz propozicije 2.4.2. □

2.5 Zatvorenost

Teorem 2.5.1. *Svaki retrakt Hausdorffovog prostora* X *je zatvoren u* X*.*

Dokaz: Neka je A proizvoljan retrakt Hausdorffovog prostora X. Dokazat ćemo da je komplement $B = X \backslash A$ otvoren skup u X. Neka je $r : X \supset A$ retrakcija, a b neka je proizvoljna točka iz B. Tada je $r(b)$ točka u A. Označimo $a = r(b)$. Pošto je $a \in A$ i $b \in B$, mora biti $a \neq b$. Prostor X je Hausdorffov pa postoje dva otvorena skupa U i V u X za koja vrijedi

$$a \in U,\ b \in V \quad \text{i} \quad U \cap V = \emptyset\,.$$

Zbog neprekidnosti retrakcije r, inverzna slika $r^{-1}(U \cap A)$ je otvoren skup koji sadrži točku b pa je i

$$W = r^{-1}(U \cap A) \cap V$$

otvoren skup koji sadrži točku b. Treba još dokazati da je $W \subset B$. Neka je x proizvoljna točka iz W. Tada je $x \in V$ i $x \in r^{-1}(U \cap A)$. Iz posljednje relacije slijedi da je $r(x) \in U$. Pošto su U i V disjunktni, mora biti $r(x) \neq x$ pa je $x \in B$. Time smo dokazali da je $W \subset B$. □

Kao posljedicu teorema 2.5.1, svaki retrakt Hausdorffovog prostora čuva svako slabo nasljedno svojstvo prostora X. Pri tome za svojstvo π prostora kažemo da je *nasljedno* ako svaki potprostor prostora sa svojstvom π također ima svojstvo π, a za svojstvo π kažemo da je *slabo nasljedno* ako svaki zatvoreni potprostor prostora sa svojstvom π također ima svojstvo π.

Primjeri slabo nasljednih svojstava prostora X:

(A) X je T_1-prostor,

(B) X je Hausdorffov prostor,

(C) X je regularan prostor,

(D) X je potpuno regularan prostor,

(E) X je diskretan prostor,

(F) X je indiskretan prostor,

(G) X je metrizabilan prostor,

(H) prvi aksiom prebrojivosti je zadovoljen u X,

(I) drugi aksiom prebrojivosti je zadovoljen u X,

(J) X je normalan prostor,

(K) X je kompaktan prostor,

(L) X je Lindelöfov prostor,

(M) X je lokalno kompaktan prostor.

Prvih devet nabrojanih svojstava (A)-(I) su također nasljedna svojstva prostora X.

2.6 Svojstvo fiksne točke

Za prostor X kažemo da ima *svojstvo fiksne točke* ako svako preslikavanje $f : X \to X$ ima fiksnu točku, tj. točku p za koju je

$$f(p) = p\,.$$

Po Brouwerevom teoremu o fiksnoj točki, jedinična n-kugla E^n u n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ ima svojstvo fiksne točke. S druge strane, $(n-1)$-sfera S^{n-1} nema svojstvo fiksne točke pošto centralna simetrija sfere nema fiksnih točaka.

Teorem 2.6.1. *Retrakcija čuva svojstvo fiksne točke.*

Dokaz: Pretpostavimo da je X prostor sa svojstvom fiksne točke, a $r : X \supset A$ neka je retrakcija od X na potprostor A. Dovoljno je pokazati da A ima svojstvo fiksne točke. Za proizvoljno preslikavanje $f : A \to A$ promotrimo kompoziciju

$$g = h \circ f \circ r : X \to X\,,$$

gdje je $h : A \subset X$ inkluzija. Prostor X ima svojstvo fiksne točke pa preslikavanje g mora imati fiksnu točku, tj. točku $x \in X$ za koju je $g(x) = x$. Pošto je

$$g(x) = f[r(x)] \in A\,,$$

točka x mora biti u A. Zbog toga je $r(x) = x$ pa i

$$x = g(x) = f[r(x)] = f(x)\,.$$

Pokazali smo da je x fiksna točka preslikavanja f pa prostor A ima svojstvo fiksne točke. $\square$

Dakle, svaki retrakt prostora koji ima svojstvo fiksne točke također ima svojstvo fiksne točke. Iz toga slijedi da $(n-1)$-sfera S^{n-1} nije retrakt jedinične n-kugle E^n. Kasnije ćemo tu tvrdnju dokazati bez korištenja Brouwerovog teorema o fiksnoj točki, a taj ćemo teorem dobiti kao posljedicu tvrdnje.

Pošto je svojstvo fiksne točke očigledno topološko svojstvo, Brouwerov teorem o fiksnoj točki povlači da n-kocka I^n ima svojstvo fiksne točke. Konačnost potencije n nije presudna pa i Hilbertova kocka $I^{\mathbb{N}}$ ima svojstvo fiksne točke. Štoviše, svaka topološka potencija I^M zatvorenog jediničnog intervala I ima svojstvo fiksne točke.

2.7 Globalna i lokalna kontraktibilnost

Za prostor X kažemo da je *kontraktibilan* ako postoji homotopija

$$h_t : X \to X, \quad 0 \leq t \leq 1\,,$$

takva da je h_0 identiteta, a h_1 konstanta. Drugim riječima, prostor X je kontraktibilan ako je identiteta prostora X homotopna konstanti.

Na primjer, jedinična n-kugla E^n je kontraktibilna dok njezin rub, jedinična $(n-1)$-sfera S^{n-1}, nije kontraktibilna.

Propozicija 2.7.1. *Svaki retrakt kontraktibilnog prostora je kontraktibilan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je X kontraktibilan prostor i da je A retrakt prostora X s retrakcijom $r : X \supset A$. Dokazat ćemo da je A kontraktibilan. Pošto je X kontraktibilan, postoji homotopija $h_t : X \to X, \quad 0 \leq t \leq 1$, takva da je h_0 identiteta, a h_1 konstanta. Koristeći retrakciju $r : X \supset A$ i inkluziju $i : A \subset X$, definirat ćemo homotopiju $k_t : A \to A, \quad 0 \leq t \leq 1$, uzevši

$$k_t = r \circ h_t \circ i, \quad \forall t\,.$$

Očigledno je k_0 identiteta prostora A, a k_1 konstanta. Time smo dokazali da je prostor A kontraktibilan. $\square$

Propozicija 2.7.2. *Jedinična $(n-1)$-sfera S^{n-1} nije retrakt jedinične n-kugle E^n, $n \geq 1$.*

Dokaz: Pošto je jedinična n-kugla E^n kontraktibilna, a jedinična $(n-1)$-sfera S^{n-1} nije kontraktibilna, tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 2.7.1. $\square$

Teorem 2.7.3. *Svako preslikavanje $f : E^n \to E^n$ ima fiksnu točku.*

Dokaz: Pretpostavimo da f nema fiksnih točaka. Tada ćemo definirati preslikavanje $r : E^n \to S^{n-1}$ ovako: Neka je x bilo koja točka iz E^n. Mora biti $f(x) \neq x$ jer f nema fiksnih točaka. Povučemo zraku od $f(x)$ do x i produžimo je dok ne presječe rub S^{n-1} u točki $r(x)$. Može se provjeriti da je pridruživanjem $x \mapsto r(x)$ definirano preslikavanje $r : E^n \to S^{n-1}$. Ako je $x \in S^{n-1}$, iz konstrukcije je jasno da je tada $r(x) = x$. Dakle, r je retrakcija od E^n na S^{n-1}, no to je kontradikcija s propozicijom 2.7.2. $\square$

Pojam kontraktibilnosti možemo definirati lokalno. Za prostor X kažemo da je *lokalno kontraktibilan u točki $p \in X$* ako za svaku okolinu U točke p postoji okolina $V \subset U$ točke p i homotopija

$$h_t : V \to U, \quad 0 \leq t \leq 1\,,$$

takva da je h_0 inkluzija, a h_1 konstanta. Drugim riječima, prostor X je lokalno kontraktibilan u točki $p \in X$ ako svaka okolina U točke p sadrži okolinu V točke p koja je kontraktibilna u U. Za prostor X kažemo da je *lokalno kontraktibilan* ako je lokalno kontraktibilan u svakoj svojoj točki.

Propozicija 2.7.4. *Svaki retrakt lokalno kontraktibilnog prostora je lokalno kontraktibilan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je X lokalno kontraktibilan prostor i da je A retrakt prostora X s retrakcijom $r : X \supset A$. Dokazat ćemo da je A lokalno kontraktibilan. Neka je p proizvoljna točka iz A, a N neka je bilo koja okolina točke p u prostoru A. Pošto je r neprekidno preslikavanje i $r(p) = p$, inverzna slika

$$U = r^{-1}(N)$$

je okolina točke p u prostoru X. Prostor X je lokalno kontraktibilan u točki p pa postoji okolina $V \subset U$ točke p u prostoru X i homotopija $h_t : V \to U, \quad 0 \leq t \leq 1$, takva da je h_0 inkluzija, a h_1 konstanta. Presjek

$$M = V \cap A$$

je okolina točke p u prostoru A. Pošto je

$$M = r(M) \subset r(V) \subset r(U) = N$$

imamo $M \subset N$. Definiramo homotopiju $k_t : M \to N, \quad 0 \leq t \leq 1$, uzevši

$$k_t(x) = r[h_t(x)], \quad \forall x \in M, \quad \forall t\,.$$

Očigledno je k_0 inkluzija, a k_1 konstanta. Time smo dokazali da je A lokalno kontraktibilan u točki p. Pošto je p proizvoljna točka iz A, slijedi da je A lokalno kontraktibilan. $\square$

Dakle, svaka retrakcija čuva i kontraktibilnost i lokalnu kontraktibilnost.

2.8 Lokalna povezanost

Kao surjektivna preslikavanja, retrakcije čuvaju povezanost i povezanost putem. Sada ćemo dokazati da retrakcije također čuvaju lokalne verzije tih svojstava.

Prisjetimo se najprije definicije lokalne povezanosti. Za prostor X kažemo da je *lokalno povezan u točki* $p \in X$ ako svaka okolina točke p sadrži povezanu okolinu točke p. Ako je prostor lokalno povezan u svakoj svojoj točki kažemo da je prostor *lokalno povezan*. Očigledno, lokalna kontraktibilnost povlači lokalnu povezanost.

Propozicija 2.8.1. *Svaki retrakt lokalno povezanog prostora je lokalno povezan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je X lokalno povezan prostor i da je A retrakt prostora X s retrakcijom $r : X \supset A$. Dokazat ćemo da je A lokalno povezan. Neka je p proizvoljna točka iz A, a N neka je bilo koja okolina točke p u prostoru A. Pošto je r neprekidno preslikavanje i $r(p) = p$, inverzna slika

$$U = r^{-1}(N)$$

je okolina točke p u prostoru X. Prostor X je lokalno povezan u točki p pa U sadrži povezanu okolinu V točke p u prostoru X. Neka je

$$M = r(V)\,.$$

Skup M sadrži okolinu $V \cap A$ točke p u prostoru A i slika je neprekidnog preslikavanja povezanog skupa V, pa je M povezana okolina točke p u prostoru A. Iz

$$M = r(V) \subset r(U) = N$$

slijedi da je A lokalno povezan u točki p. Pošto je p proizvoljna točka iz A, dokazali smo da je A lokalno povezan. $\square$

Za dani cijeli broj $n \geq 0$ definirat ćemo lokalnu povezanost u dimenziji n (u homotopskom smislu). Promatramo jediničnu n-sferu S^n i jediničnu $(n+1)$-kuglu E^{n+1} u $(n+1)$-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

Za prostor X kažemo da je *lokalno povezan u dimenziji n u točki $p \in X$* ako svaka okolina U točke p sadrži okolinu V točke p takvu da svako preslikavanje $f : S^n \to V$ ima proširenje $f^* : E^{n+1} \to U$. Ako je X lokalno povezan u dimenziji n u svakoj svojoj točki, kažemo da je X *lokalno povezan u dimenziji n*. Ako je X lokalno kontraktibilan, tada je očigledno lokalno povezan u dimenziji n, za svaki $n \geq 0$. Za specijalne slučajeve $n = 0$ i $n = 1$, prostor lokalno povezan u tim dimenzijama obično zovemo *lokalno putovima povezan* (za $n = 0$) i *lokalno jednostavno povezan* (za $n = 1$).

Propozicija 2.8.2. *Ako je prostor X lokalno povezan u dimenziji n, tada je i svaki retrakt A od X lokalno povezan u dimenziji n.*

Dokaz: Neka je $r : X \supset A$ retrakcija. Promotrimo proizvoljnu točku p iz A i bilo koju okolinu N od p u prostoru A. Pošto je r neprekidno preslikavanje i $r(p) = p$, inverzna slika

$$U = r^{-1}(N)$$

je okolina točke p u prostoru X. Prostor X je lokalno povezan u dimenziji n pa U sadrži okolinu V točke p u prostoru X takvu da svako preslikavanje iz S^n u V ima proširenje iz E^{n+1} u U. Tada je presjek

$$M = V \cap A$$

okolina točke p u prostoru A i sadržan je u N. Neka je $f : S^n \to M$ dano preslikavanje. Pošto je $M \subset V$, preslikavanje f ima proširenje $f^\# : E^{n+1} \to U$. Definiramo preslikavanje $f^* : E^{n+1} \to N$ uzevši

$$f^*(x) = r[f^\#(x)], \quad \forall x \in E^{n+1} .$$

Tada je f^* proširenje od f. Time smo dokazali da je A lokalno povezan u dimenziji n u svakoj točki p iz A. □

2.9 Deformacijski retrakti

Retrakt A prostora X zovemo *deformacijski retrakt* od X ako postoji retrakcija $r : X \supset A$ takva da je kompozicija

$$h \circ r : X \to X ,$$

gdje je $h : A \subset X$ inkluzija, homotopna identiteti prostora X. Drugim riječima, potprostor A prostora X je deformacijski retrakt ako postoji homotopija

$$f_t : X \to X, \quad 0 \leq t \leq 1 ,$$

takva da je f_0 identiteta prostora X, a f_1 idempotentno preslikavanje za koje je

$$f_1(X) = A .$$

Ako homotopija f_t zadovoljava dodatni uvjet

$$f_t(a) = a, \quad \forall a \in A, \quad \forall t ,$$

tada A nazivamo *jaki deformacijski retrakt* od X.

Slijedeća propozicija je očigledna:

Propozicija 2.9.1. *Ako je A deformacijski retrakt od X tada je inkluzija $h : A \subset X$, homotopska ekvivalencija.*

U stvari, retrakcija $r : X \supset A$ iz gornje definicije je obostrani homotopski inverz od h. Zbog toga svaki deformacijski retrakt prostora X ima sva homotopska svojstva prostora X, uz ona svojstva od X koja su očuvana retrakcijom.

Primjer jakog deformacijskog retrakta:
Neka je X jedinična n-kugla E^n bez ishodišta. Tada je $(n-1)$-sfera S^{n-1} jaki deformacijski retrakt od X. Homotopija $f_t : X \to X, \quad 0 \leq t \leq 1$, definirana sa

$$f_t(x) = \left(1 - t + \frac{t}{|x|}\right) x, \quad \forall x \in X, \quad \forall t ,$$

zadovoljava tražene uvjete: f_0 je identiteta na X, f_1 je idempotentno preslikavanje za koje je

$$f_1(X) = S^{n-1}$$

i vrijedi

$$f_t(x) = x, \quad \forall x \in S^{n-1}, \quad \forall t\,.$$

2.10 Okolinski retrakti

Za potprostor A prostora X kažemo da je *okolinski retrakt* od X ako je A retrakt otvorenog potprostora U od X. Specijalno, svaki retrakt prostora X je okolinski retrakt od X, a i svaki otvoreni potprostor prostora X je okolinski retrakt od X.

Pošto otvoreni potprostori prostora X nasljeđuju sva lokalna topološka svojstva od X, svaki okolinski retrakt od X ima slijedeća lokalna svojstva, pod uvjetom da ih ima i X:

(a) lokalna kompaktnost,

(b) lokalna kontraktibilnost,

(c) lokalna povezanost,

(d) lokalna povezanost u dimenziji n.

Pored toga svaki okolinski retrakt od X ima sva nasljedna svojstva od X.

Primjer okolinskog retrakta:
$(n-1)$-sfera S^{n-1} je okolinski retrakt n-kugle E^n jer je S^{n-1} retrakt otvorenog potprostora $E^n \backslash 0$ od E^n.

Poglavlje 3

Apsolutni ekstenzori

3.1 Klase prostora

Za klasu prostora $\mathcal{C}$ kažemo da je slabo nasljedna topološka klasa prostora ako zadovoljava slijedeća dva uvjeta:

1. $\mathcal{C}$ je *topološka* klasa, tj. ako $\mathcal{C}$ sadrži prostor X, tada sadrži i svaku homeomorfnu sliku prostora X.

2. $\mathcal{C}$ je *slabo nasljedna* klasa, tj. ako $\mathcal{C}$ sadrži prostor X, tada sadrži i svaki zatvoreni potprostor prostora X.

Primjeri slabo nasljednih topoloških klasa prostora:

$\mathcal{H}$ klasa svih Hausdorffovih prostora,

$\mathcal{R}$ klasa svih regularnih prostora,

$\mathcal{CR}$ klasa svih potpuno regularnih prostora,

$\mathcal{M}$ klasa svih metrizabilnih prostora,

$\mathcal{C}_1$ klasa svih prostora koji zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti,

$\mathcal{C}_2$ klasa svih prostora koji zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti,

$\mathcal{N}$ klasa svih normalnih prostora,

$\mathcal{K}$ klasa svih kompaktnih prostora,

$\mathcal{LK}$ klasa svih lokalno kompaktnih prostora,

$\mathcal{L}$ klasa svih Lindelöfovih prostora.

Pošto je presjek bilo koje dvije slabo nasljedne topološke klase prostora očigledno također slabo nasljedna topološka klasa prostora, takve su i:

$\mathcal{KM}$ klasa svih kompaktnih metrizabilnih prostora,

$\mathcal{SM}$ klasa svih separabilnih metrizabilnih prostora.

Primjera ima još mnogo. Uz to, unija bilo koje dvije slabo nasljedne topološke klase prostora je očigledno također slabo nasljedna topološka klasa prostora.

3.2 AE i ANE za klasu prostora

Za zatvoreni potprostor A prostora X kažemo da ima *svojstvo proširenja* (*ekstenzije*) u X s obzirom na prostor Y ako svako preslikavanje $f : A \to Y$ ima proširenje preko X. Za zatvoreni potprostor A prostora X kažemo da ima *svojstvo okolinskog proširenja* (*ekstenzije*) u X s obzirom na prostor Y ako svako preslikavanje $f : A \to Y$ ima proširenje preko nekog otvorenog potprostora U od X koji sadrži A. Otvoreni potprostor U ovisi o preslikavanju f.

Označimo sada sa $\mathcal{C}$ danu slabo nasljednu topološku klasu prostora. Kažemo da je prostor Y iz klase $\mathcal{C}$ *apsolutni ekstenzor za klasu* $\mathcal{C}$ (kratko: **AE** za klasu $\mathcal{C}$) ako svaki zatvoreni potprostor A bilo kojeg prostora X iz klase $\mathcal{C}$ ima svojstvo proširenja u X s obzirom na Y. Kažemo da je prostor Y iz klase $\mathcal{C}$ *apsolutni okolinski ekstenzor za klasu* $\mathcal{C}$ (kratko: **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, od engleskog **A**bsolute **N**eighborhood **E**xtensor) ako svaki zatvoreni potprostor A bilo kojeg prostora X iz klase $\mathcal{C}$ ima svojstvo okolinskog proširenja u X s obzirom na Y.

Slijedeće propozicije su očigledne:

Propozicija 3.2.1. *Svaki* **AE** *za klasu* $\mathcal{C}$ *je* **ANE** *za klasu* $\mathcal{C}$.

Propozicija 3.2.2. *Ako je* $\mathcal{B}$ *slabo nasljedna topološka klasa prostora koja je sadržana u klasi* $\mathcal{C}$, *tada je svaki* **AE** *(odnosno* **ANE***) za klasu* $\mathcal{C}$ *također* **AE** *(odnosno* **ANE***) za klasu* $\mathcal{B}$.

Iz propozicije 3.2.2 vidimo da kada klasa $\mathcal{C}$ postaje veća, familija svih **AE** (odnosno **ANE**) za klasu $\mathcal{C}$ postaje sve manja. Međutim, jednočlani prostor je očigledno **AE** za svaku klasu $\mathcal{C}$.

Propozicija 3.2.3. *Ako klasa $\mathcal{C}$ sadrži prostor X koji nije normalan, tada je svaki Hausdorffov* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$ jednočlan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je prostor Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$ te da je Y Hausdorffov i da sadrži više od jedne točke. Uzmimo dvije različite točke p i q iz Y. Tada postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V u Y takvi da je $p \in U$ i $q \in V$. Pošto X nije normalan, postoje dva disjunktna zatvorena skupa B i C u X koja nemaju disjunktne okoline. Promotrimo zatvoren potprostor $A = B \cup C$ od X i preslikavanje $f : A \to Y$ definirano s

$$f(x) = \begin{cases} p, & x \in B \\ q, & x \in C\,. \end{cases}$$

Pošto je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, preslikavanje f ima proširenje $g : W \to Y$ preko nekog otvorenog potprostora W od X koji sadrži A. Tada su $g^{-1}(U)$ i $g^{-1}(V)$ disjunktne otvorene okoline od B i C što je kontradikcija s pretpostavkom. □

Zbog propozicije 3.2.3 najčešće ćemo pretpostaviti da se dana klasa $\mathcal{C}$ sastoji samo od normalnih prostora.

3.3 Tietzeov teorem proširenja

Tietzeovim teoremom proširenja dan je prvi netrivijalni primjer apsolutnog ekstenzora za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.

Teorem 3.3.1. *Zatvoreni jedinični interval realnih brojeva $I = [0, 1]$ je* **AE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.*

Dokaz: Neka je A zatvoreni potprostor proizvoljnog normalnog prostora X. Treba dokazati da A ima svojstvo proširenja u X s obzirom na I. Promotrimo proizvoljno preslikavanje $f : A \to I$. Induktivno ćemo konstruirati dva niza preslikavanja

$$f_n : A \to I \quad \text{i} \quad g_n : X \to I, \quad n \geq 0\,.$$

Promotrimo zatvorene podskupove skupa A

$$\begin{aligned} B_n &= \left\{x \in A \mid f_n(x) \leq \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right\}, \\ C_n &= \left\{x \in A \mid f_n(x) \geq \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right\}. \end{aligned}$$

Skup A je zatvoren u X pa su skupovi B_n i C_n također zatvoreni u X. Dakle, B_n i C_n su disjunktni zatvoreni podskupovi normalnog prostora X. Tada po Urysohnovoj lemi postoji preslikavanje $\chi_{B_n,C_n} : X \to I$,

$$\chi_{B_n,C_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in B_n \\ 1, & x \in C_n\,. \end{cases}$$

Pomoću preslikavanja χ_{B_n,C_n} definiramo preslikavanje g_n uzevši

$$g_n(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \chi_{B_n,C_n}(x), \quad \forall x \in X\,.$$

Pokažimo da vrijedi

$$0 \leq f_n(x) - g_n(x) \leq 1, \quad \forall x \in A\,. \tag{3.1}$$

Za $x \in B_n$ vrijedi $g_n(x) = 0$ pa je nejednakost (3.1) zadovoljena. Za $x \notin B_n$ vrijedi

$$f_n(x) > \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{i} \quad g_n(x) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

pa je nejednakost (3.1) ponovo zadovoljena. Dakle, možemo definirati preslikavanje f_{n+1} uzevši

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x), \quad \forall x \in A\,.$$

Time smo induktivno definirali preslikavanja f_n i g_n pa pokažimo neke nejednakosti koje ona zadovoljavaju. Zbog

$$0 \leq \chi_{B_n,C_n}(x) \leq 1, \quad \forall x \in X\,,$$

vrijedi

$$0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \forall x \in X\,. \tag{3.2}$$

Induktivno ćemo pokazati da također vrijedi

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \forall x \in A\,. \tag{3.3}$$

Za $n = 0$ nejednakost (3.3) je očigledno zadovoljena. Pretpostavimo da (3.3) vrijedi za neki $n > 0$. Tada iz nejednakosti (3.1) i (3.3) slijedi

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \quad \forall x \in A\,,$$

čime smo dokazali (3.3). Sada zbog (3.2) imamo

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \leq \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^i\right] < 1, \quad \forall x \in X, \quad n \geq 0\,.$$

Dakle, za svaki $n \geq 0$ možemo definirati preslikavanje $s_n : X \to I$ uzevši

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x), \quad \forall x \in X\,.$$

Zbog nejednakosti (3.2) red $\sum g_n(x)$ uniformno konvergira u X. Pošto je g_n neprekidna funkcija za svaki $n \geq 0$, slijedi da za svaki $x \in X$ postoji limes $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$, čime je definirano preslikavanje $g : X \to I$,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \quad \forall x \in X\,.$$

Zbog definicije preslikavanja f_{n+1} imamo

$$g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x), \quad \forall x \in A\,,$$

iz čega slijedi

$$s_n(x) = f(x) - f_{n+1}(x), \quad \forall x \in A\,,$$

što zajedno s nejednakosti (3.3) daje

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A\,.$$

pa je g proširenje preslikavanja f. Dakle, A ima svojstvo proširenja u X s obzirom na I. □

3.4 Produkt ekstenzora

Propozicija 3.4.1. *Bilo koji topološki produkt apsolutnih ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ je apsolutni ekstenzor za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Neka je $\{Y_\mu | \mu \in M\}$ dana familija apsolutnih ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ i neka je Y topološki produkt prostora iz te familije. Dokazat ćemo da je Y **AE** za klasu $\mathcal{C}$. Neka je X bilo koji prostor iz klase $\mathcal{C}$ i $f : A \to X$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A od X. Za svaki $\mu \in M$ promotrimo kompoziciju

$$f_\mu = p_\mu \circ f : A \to Y_\mu\,,$$

gdje je $p_\mu : Y \to Y_\mu$ prirodna projekcija. Pošto je Y_μ **AE** za klasu $\mathcal{C}$, preslikavanje f_μ ima proširenje $g_\mu : X \to Y_\mu$. Definiramo preslikavanje $g : X \to Y$ uzevši

$$p_\mu[g(x)] = g_\mu(x), \quad \forall x \in X\,.$$

Lako se pokaže da je $g|A = f$. □

Korolar 3.4.2. *Bilo koja topološka potencija jediničnog intervala I^M je* **AE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora. Specijalno, n-kocka I^n i Hilbertova kocka $I^{\mathbb{N}}$ su* **AE** *za klasu $\mathcal{N}$.*

Dokaz: Iz teorema 3.3.1 i propozicije 3.4.1. □

Korolar 3.4.3. *n-kugla E^n i n-simpleks Δ^n su* **AE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz očigledne činjenice da je svojstvo prostora biti **AE** za klasu $\mathcal{C}$ topološko svojstvo. □

Za apsolutne okolinske ekstenzore imamo nešto slabiji analogon propoziciji 3.4.1.

Propozicija 3.4.4. *Svaki topološki produkt konačne familije apsolutnih okolinskih ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ je apsolutni okolinski ekstenzor za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Neka je $\{Y_\mu | \mu \in M\}$ dana konačna familija apsolutnih okolinskih ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ i neka je Y topološki produkt prostora iz te familije. Dokazat ćemo da je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$. Neka je X bilo koji prostor iz klase $\mathcal{C}$ i $f : A \to X$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A od X. Za svaki $\mu \in M$ promotrimo kompoziciju

$$f_\mu = p_\mu \circ f : A \to Y_\mu \,,$$

gdje je $p_\mu : Y \to Y_\mu$ prirodna projekcija. Pošto je Y_μ **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, postoji otvoren potprostor U_μ prostora X koji sadrži A i proširenje $g_\mu : U_\mu \to Y_\mu$. Skup M je konačan pa je presjek

$$U = \bigcap_{\mu \in M} U_\mu$$

otvoren potprostor prostora X koji sadrži A. Definiramo preslikavanje $g : U \to Y$ uzevši

$$p_\mu[g(x)] = g_\mu(x), \quad \forall x \in U \,.$$

Lako se pokaže da je $g|A = f$. □

3.5 Retrakt ekstenzora

Propozicija 3.5.1. *Svaki retrakt apsolutnog ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ je apsolutni ekstenzor za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Neka je Z proizvoljan **AE** za klasu $\mathcal{C}$, a Y neka je retrakt od Z s retrakcijom $r : Z \supset Y$. Dokazat ćemo da je Y **AE** za klasu $\mathcal{C}$. Neka je

$f : A \to Y$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A proizvoljnog prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Promotrimo kompoziciju

$$\Phi = i \circ f : A \to Z\,,$$

gdje je $i : Y \subset Z$ inkluzija. Pošto je Z **AE** za klasu $\mathcal{C}$, preslikavanje Φ ima proširenje $\phi : X \to Z$. Tada je kompozicija

$$g = r \circ \phi : X \to Y$$

proširenje funkcije f preko X. $\Box$

Propozicija 3.5.2. *Svaki okolinski retrakt apsolutnog okolinskog ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ je apsolutni okolinski ekstenzor za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Neka je Z proizvoljan **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, a Y neka je okolinski retrakt od Z. Tada postoji otvoren potprostor W prostora Z zajedno s retrakcijom $r : W \supset Y$. Dokazat ćemo da je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$. Neka je $f : A \to Y$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A proizvoljnog prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Promotrimo kompoziciju

$$\Phi = i \circ f : A \to Z\,,$$

gdje je $i : Y \subset Z$ inkluzija. Pošto je Z **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, preslikavanje Φ ima proširenje $\phi : V \to Z$ preko nekog otvorenog potprostora V od X koji sadrži A. Inverzna slika

$$U = \phi^{-1}(W)$$

je otvoren skup u otvorenom potprostoru V prostora X, pa je također otvoren potprostor prostora X i očigledno sadrži A. Definiramo preslikavanje $g : U \to Y$ uzevši

$$g(x) = r[\phi(x)], \quad \forall x \in U\,.$$

Tada je g proširenje funkcije f preko U. $\Box$

Korolar 3.5.3. *n-sfera S^n je* **ANE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.*

Dokaz: Pošto je n-sfera S^n okolinski retrakt $(n+1)$-kugle E^{n+1}, tvrdnja slijedi iz propozicije 3.2.1, korolara 3.4.3 i propozicije 3.5.2. $\Box$

3.6 Otvoreni potprostori apsolutnih okolinskih ekstenzora

Propozicija 3.6.1. *Svaki otvoreni potprostor apsolutnog okolinskog ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ je apsolutni okolinski ekstenzor za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Neka je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, a W neka je otvoren potprostor prostora Y. Dokazat ćemo da je W **ANE** za klasu $\mathcal{C}$. Neka je $f : A \to W$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A proizvoljnog prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Promotrimo kompoziciju

$$\Phi = i \circ f : A \to Y \,,$$

gdje je $i : W \subset Y$ inkluzija. Pošto je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, preslikavanje Φ ima proširenje $\phi : V \to Y$ preko nekog otvorenog potprostora V od X koji sadrži A. Inverzna slika

$$U = \phi^{-1}(W)$$

je otvoren skup u otvorenom potprostoru V prostora X pa je također otvoren potprostor prostora X i sadrži A. Definiramo preslikavanje $g : U \to W$ uzevši

$$g(x) = \phi(x), \quad \forall x \in U \,.$$

Tada je g proširenje funkcije f preko U. □

Korolar 3.6.2. *n-dimenzionalni Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je* **ANE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.*

Dokaz: Pošto je n-dimenzionalni Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ homeomorfan unutrašnjosti jedinične n-kugle E^n, tvrdnja slijedi iz korolara 3.4.3 i propozicije 3.6.1. □

3.7 Kontraktibilni apsolutni okolinski ekstenzori

Pretpostavit ćemo da je svaki prostor iz klase $\mathcal{C}$ normalan.

Teorem 3.7.1. *Ako je kontraktibilan prostor Y* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$, tada je Y* **AE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Prostor Y je kontraktibilan pa postoji točka y_0 i preslikavanje

$$h : Y \times I \to Y$$

takvo da je $h(y, 0) = y$ i $h(y, 1) = y_0$, za svaki $y \in Y$. Neka je $f : A \to Y$ bilo koje preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A proizvoljnog prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Pošto je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, preslikavanje f ima proširenje $g : U \to Y$ preko nekog otvorenog potprostora U prostora X koji sadrži A. Prostor X je normalan pa postoji otvoren potprostor V takav da je

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset U$$

i po Urysohnovoj lemi postoji preslikavanje $e : X \to I$ takvo da je

$$e(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in X \backslash V \, . \end{cases}$$

Sada možemo definirati preslikavanje $f^* : X \to Y$ uzevši

$$f^*(x) = \begin{cases} h[g(x), e(x)], & x \in \overline{V} \\ y_0, & x \in X \backslash V \, . \end{cases}$$

Pošto je $f^*|A = f$ dokazali smo da je Y **AE** za klasu $\mathcal{C}$. □

Korolar 3.7.2. *n-dimenzionalni Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je* **AE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.*

Dokaz: Pošto je n-dimenzionalni Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ kontraktibilan, tvrdnja slijedi iz korolara 3.6.2 i teorema 3.7.1. □

Korolar 3.7.3. *Bilo koja topološka potencija $\mathbb{R}^M$ realnog pravca $\mathbb{R}$ je* **AE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.*

Dokaz: Kao specijalan slučaj korolara 3.7.2, realan pravac $\mathbb{R}$ je **AE** za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora pa tvrdnja slijedi iz propozicije 3.4.1. □

3.8 Unija otvorenih ekstenzora

Pretpostavit ćemo da je svaki prostor iz klase $\mathcal{C}$ normalan.

Propozicija 3.8.1. *Neka su Y_1 i Y_2 dva otvorena potprostora prostora Y takva da vrijedi $Y = Y_1 \cup Y_2$. Ako su Y_1 i Y_2* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$, tada je Y* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Neka je $f : A \to Y$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A proizvoljnog prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Dokazat ćemo da f ima proširenje preko neke okoline od A u prostoru X. Potprostor A od X pokriven je skupovima

$$f^{-1}(Y_1) \quad \text{i} \quad f^{-1}(Y_2)$$

pa je prostor X pokriven otvorenim skupovima

$$W_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X \backslash A) \quad \text{i} \quad W_2 = f^{-1}(Y_2) \cup (X \backslash A) \, .$$

Pošto je X normalan, postoje zatvoreni skupovi $X_1 \subset W_1$ i $X_2 \subset W_2$ u X takvi da je $X = X_1 \cup X_2$. Neka je

$$A_1 = X_1 \cap A \quad \text{i} \quad A_2 = X_2 \cap A$$

pa imamo $A = A_1 \cup A_2$ i vrijedi

$$f(A_1) \subset Y_1, \quad f(A_2) \subset Y_2, \quad f(A_1 \cap A_2) \subset Y_1 \cap Y_2 .$$

Po propoziciji 3.6.1, prostor $Y_1 \cap Y_2$ je **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, a $A_1 \cap A_2$ je zatvoreni potprostor prostora $X_1 \cap X_2$ iz klase $\mathcal{C}$ pa restrikcija $f|A_1 \cap A_2$ ima proširenje

$$\Phi : M \to Y_1 \cap Y_2$$

preko otvorenog potprostora M od $X_1 \cap X_2$. Pošto je $X_1 \cap X_2$ normalan prostor, postoji otvoren skup N u $X_1 \cap X_2$ takav da je

$$A_1 \cap A_2 \subset N \subset \overline{N} \subset M \subset X_1 \cap X_2 .$$

Promotrimo presjek $\overline{N} \cap A$. Imamo

$$A_1 \cap A_2 \subset \overline{N} \cap A \subset X_1 \cap X_2 \cap A = A_1 \cap A_2$$

pa je $\overline{N} \cap A = A_1 \cap A_2$. Dakle, možemo definirati preslikavanje $g : \overline{N} \cup A \to Y$ uzevši

$$g(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \in \overline{N} \\ f(x), & x \in A . \end{cases}$$

Pošto je $g(\overline{N} \cap A) \subset Y_1$, a Y_1 je **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, restrikcija $g|\overline{N} \cap A_1$ ima proširenje

$$h_1 : V_1 \to Y_1$$

preko otvorenog skupa V_1 u X_1. Slično, restrikcija $g|\overline{N} \cap A_2$ ima proširenje

$$h_2 : V_2 \to Y_2$$

preko otvorenog skupa V_2 u X_2. Pošto je prostor X_1 normalan, postoji otvoren skup Q_1 takav da je

$$\overline{N} \cup A_1 \subset Q_1 \subset \overline{Q_1} \subset V_1 \subset X_1 .$$

Slično, postoji skup Q_2 takav da je

$$\overline{N} \cup A_2 \subset Q_2 \subset \overline{Q_2} \subset V_2 \subset X_2 .$$

U drugu ruku, pošto su $(X_1 \cap X_2) \backslash N$ i A disjunktni zatvoreni skupovi u normalnom prostoru X, postoje otvoreni skupovi D i E takvi da je

$$(X_1 \cap X_2) \backslash N \subset D, \quad A \subset E \quad \text{i} \quad \overline{D} \cap \overline{E} = \emptyset .$$

Promotrimo zatvorene skupove u X,

$$J_1 = \overline{(Q_1 \backslash X_2)} \cap \overline{E} \quad \text{i} \quad J_2 = \overline{(Q_2 \backslash X_1)} \cap \overline{E}$$

pa imamo $J_1 \subset V_1$, $J_2 \subset V_1$ i $J_1 \cap J_2 \subset N$. Neka su

$$K_1 = J_1 \cup \overline{N} \quad \text{i} \quad K_2 = J_2 \cup \overline{N}\,.$$

Tada su K_1 i K_2 zatvoreni skupovi u X i vrijedi

$$K_1 \subset V_1, \quad K_2 \subset V_2, \quad K_1 \cap K_2 = \overline{N}\,.$$

Pošto je $h_1|\overline{N} = g|\overline{N} = h_2|\overline{N}$, možemo na potprostoru $K = K_1 \cup K_2$ prostora X definirati preslikavanje $h : K \to Y$ uzevši

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x \in K_1 \\ h_2(x), & x \in K_2\,. \end{cases}$$

Očigledno je h proširenje preslikavanja f. Još treba pokazati da K sadrži neku otvorenu okolinu od A. Promotrimo stoga skup

$$G = [(Q_1 \backslash X_2) \cup (Q_2 \backslash X_1) \cup N] \cap E\,.$$

Tada imamo $A \subset G \subset K$. Pošto je E otvoren skup u X, treba pokazati da je i skup

$$H = (Q_1 \backslash X_2) \cup (Q_2 \backslash X_1) \cup N$$

otvoren u X. Po definiciji skupova N, Q_1 i Q_2, postoje otvoreni skupovi B_0, B_1 i B_2 takvi da je

$$N = B_0 \cap X_1 \cap X_2, \quad Q_1 = B_1 \cap X_1, \quad Q_2 = B_2 \cap X_2\,.$$

Odmah slijedi da su skupovi

$$Q_1 \backslash X_2 = B_1 \backslash X_2 \quad \text{i} \quad Q_2 \backslash X_1 = B_2 \backslash X_1$$

otvoreni u X. Pošto je $N \subset Q_1$ i $N \subset Q_2$, imamo

$$N \subset B_0 \cap B_1 \cap B_2\,. \tag{3.4}$$

Obrnuto, neka je x proizvoljna točka iz $B_0 \cap B_1 \cap B_2$. Ako je $x \in X_1 \cap X_2$, tada je $x \in N$. Ako je $x \in X \backslash X_2$, tada je $x \in B_1 \cap (X \backslash X_2) = B_1 \backslash X_2$. Ako je $x \in X \backslash X_1$, tada je $x \in B_2 \cap (X \backslash X_1) = B_2 \backslash X_1$. Dakle, vrijedi

$$B_0 \cap B_1 \cap B_2 \subset H\,. \tag{3.5}$$

Sada zbog inkluzija (3.4) i (3.5) imamo

$$H = (B_1 \backslash X_2) \cup (B_2 \backslash X_1) \cup (B_0 \cap B_1 \cap B_2)$$

čime smo dokazali da je H otvoren skup u X. $\square$

Teorem 3.8.2. *Ako je prostor Y unija konačnog broja otvorenih potprostora od kojih je svaki* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$, tada je Y* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi direktno iz teorema 3.8.1. □

Propozicija 3.8.3. *Svaki kompaktan lokalno Euklidski prostor je* **ANE** *za klasu $\mathcal{N}$ svih normalnih prostora.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi iz korolara 3.6.2 i teorema 3.8.2. □

Propozicija 3.8.4. *Neka su Y_1 i Y_2 dva otvorena potprostora prostora Y takva da vrijedi $Y = Y_1 \cup Y_2$. Ako su tri prostora Y_1, Y_2 i $Y_1 \cap Y_2$* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$, tada je Y* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu propozicije 3.8.1, samo jednostavniji. □

3.9 Zatvoreni potprostori ekstenzora

Zatvoren potprostor apsolutnog okolinskog ekstenzora za klasu $\mathcal{C}$ nije općenito apsolutni okolinski ekstenzor za klasu $\mathcal{C}$. Na primjer, ako $\mathcal{C}$ sadrži jedinični interval realnih brojeva $I = [0, 1]$, tada bilo koji zatvoreni potprostor od I, koji nije lokalno povezan, nije apsolutni okolinski ekstenzor za klasu $\mathcal{C}$.

Ipak, uz važeću pretpostavku da je svaki prostor iz klase $\mathcal{C}$ normalan, imamo slijedeće propozicije:

Propozicija 3.9.1. *Ako su Y_1 i Y_2 dva zatvorena potprostora prostora Y koji je* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$ takva da je $Y_1 \cup Y_2 = Y$ i da je $Y_1 \cap Y_2$* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$, tada su Y_1 i Y_2* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Dokažimo da je Y_1 **ANE** za klasu $\mathcal{C}$. Neka je $f : A \to Y_1$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A proizvoljnog prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Dovoljno je pokazati da f ima proširenje preko neke okoline od A u prostoru X. Pošto je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, kompozicija Φ funkcije f i inkluzije $i : Y_1 \subset Y$,

$$\Phi = i \circ f : A \to Y$$

ima proširenje $\Phi^* : U \to Y$ preko nekog otvoreno potprostora u X. Prostor X je normalan pa postoji otvoren skup V u X takav da je

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset U\,.$$

Neka je $\phi = \Phi^*|\overline{V}$ pa promotrimo inverzne slike

$$B_1 = \phi^{-1}(Y_1) \quad \text{i} \quad B_2 = \phi^{-1}(Y_2)\,.$$

Skupovi B_1 i B_2 su zatvoreni u $\overline{V}$ pa su zatvoreni i u X. Nadalje, imamo

$$\overline{V} = B_1 \cup B_2, \quad A \subset B_1, \quad \phi(B_1 \cap B_2) \subset Y_1 \cap Y_2 .$$

Kao zatvoren potprostor od X, prostor B_2 je iz klase $\mathcal{C}$. Pošto je $B_1 \cap B_2$ zatvoren u B_2, a prostor $Y_1 \cap Y_2$ je **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, restrikcija $\phi|B_1 \cap B_2$ ima proširenje

$$\kappa : N \to Y_1 \cap Y_2$$

preko otvorenog potprostora N od B_2. Pošto je B_2 normalan, postoji otvoren skup M u B_2 takav da je

$$B_1 \cap B_2 \subset M \subset \overline{M} \subset N \subset B_2 .$$

Skupovi B_1 i $\overline{M}$ su zatvoreni u X i vrijedi

$$B_1 \cap \overline{M} = B_1 \cap \overline{M} \cap B_2 = B_1 \cap B_2$$

pa možemo definirati preslikavanje $g : B_1 \cup \overline{M} \to Y_1$ uzevši

$$g(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in B_1 \\ \kappa(x), & x \in \overline{M} . \end{cases}$$

Tada je g proširenje preslikavanja f preko $B_1 \cup \overline{M}$. Još treba pokazati da $B_1 \cup \overline{M}$ sadrži neku otvorenu okolinu od A. Promotrimo stoga skup

$$W = (B_1 \cup M) \cap V .$$

Tada imamo $A \subset W \subset B_1 \cup \overline{M}$ pa je dovoljno pokazati da je W otvoren skup u X. Zbog $B_1 \cap B_2 \subset M$ i $\overline{V} = B_1 \cup B_2$ imamo

$$\begin{aligned} W &= [(\overline{V} \backslash B_2) \cup M] \cap V \\ &= (V \backslash B_2) \cup (M \cap V) . \end{aligned}$$

Pošto je M otvoren skup u B_2, postoji otvoren skup Q u X takav da je $M = Q \cap B_2$. Tada imamo

$$\begin{aligned} M \cap V &\subset Q \cap V \\ &= Q \cap \overline{V} \cap V \\ &= Q \cap (B_1 \cup B_2) \cap V \\ &\subset [B_1 \cup (Q \cap B_2)] \cap V \\ &= (B_1 \cup M) \cap V = W \end{aligned}$$

iz čega slijedi $W = (V \backslash B_2) \cup (Q \cap V)$ što povlači da je W otvoren skup u X. □

Propozicija 3.9.2. *Ako su Y_1 i Y_2 dva zatvorena potprostora prostora Y koji je* **AE** *za klasu $\mathcal{C}$ takva da je $Y_1 \cup Y_2 = Y$ i da je $Y_1 \cap Y_2$* **AE** *za klasu $\mathcal{C}$, tada su Y_1 i Y_2* **AE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu propozicije 3.9.1 samo jednostavniji. □

3.10 Unija zatvorenih ekstenzora

Sada na klasu $\mathcal{C}$ postavljamo još jači uvjet. Pretpostavit ćemo da je svaki prostor iz klase $\mathcal{C}$ kompletno normalan.

Propozicija 3.10.1. *Neka su Y_1 i Y_2 dva zatvorena potprostora prostora Y takva da je $Y = Y_1 \cup Y_2$. Ako su Y_1, Y_2 i $Y_1 \cap Y_2$* **ANE** *za klasu C, tada je Y* **ANE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Neka je $f : A \to Y$ preslikavanje definirano na zatvorenom potprostoru A proizvoljnog prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Dokazat ćemo da f ima proširenje preko neke okoline od A u prostoru X. Promotrimo u prostoru A inverzne slike

$$A_1 = f^{-1}(Y_1) \quad \text{i} \quad A_2 = f^{-1}(Y_2)\,.$$

Skupovi A_1 i A_2 su zatvoreni u X, a njihove razlike su separirane u X, tj. vrijedi

$$[\overline{(A_1\backslash A_2)} \cap (A_2\backslash A_1)] \cup [(A_1\backslash A_2) \cap \overline{(A_2\backslash A_1)}] = \emptyset\,.$$

Pošto je prostor X kompletno normalan, postoji otvoren skup U u X takav da je

$$A_1\backslash A_2 \subset U \subset \overline{U} \subset X\backslash(A_2\backslash A_1) = (X\backslash A_2) \cup (A_1 \cap A_2)\,.$$

Definiramo dva zatvorena skupa X_1 i X_2 u X uzevši

$$X_1 = \overline{U} \cup (A_1 \cap A_2) \quad \text{i} \quad X_2 = (X\backslash U) \cup (A_1 \cap A_2)$$

pa tada očigledno vrijedi

$$X_1 \cap A = A_1, \quad X_2 \cap A = A_2, \quad X_1 \cup X_2 = X\,.$$

Pošto je $Y_1 \cap Y_2$ **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, a $A_1 \cap A_2$ je zatvoren skup u $X_1 \cap X_2$ iz klase $\mathcal{C}$, restrikcija $f|A_1 \cap A_2$ ima proširenje

$$\Phi : M \to Y_1 \cap Y_2$$

preko otvorenog potprostora M od $X_1 \cap X_2$. Dalje dokaz propozicije 3.10.1 teče isto kao dokaz propozicije 3.8.1. □

Propozicija 3.10.2. *Neka su Y_1 i Y_2 dva zatvorena potprostora prostora Y takva da je $Y = Y_1 \cup Y_2$. Ako su Y_1, Y_2 i $Y_1 \cap Y_2$* **AE** *za klasu $\mathcal{C}$, tada je Y* **AE** *za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Dokaz je analogan dokazu propozicije 3.10.1 samo jednostavniji. □

Poglavlje 4

Apsolutni retrakti

4.1 AR i ANR za klasu prostora

Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna slabo nasljedna topološka klasa. Kažemo da je prostor Y iz klase $\mathcal{C}$ *apsolutni retrakt za klasu* $\mathcal{C}$ (kratko: **AR** za klasu $\mathcal{C}$) ako je svaka homeomorfna slika prostora Y, kao zatvoreni potprostor prostora Z iz klase $\mathcal{C}$, retrakt od Z. Slično, kažemo da je prostor Y iz klase $\mathcal{C}$ *apsolutni okolinski retrakt za klasu* $\mathcal{C}$ (kratko: **ANR** za klasu $\mathcal{C}$, od engleskog **A**bsolute **N**eighborhood **R**etract) ako je svaka homeomorfna slika prostora Y, kao zatvoreni potprostor prostora Z iz klase $\mathcal{C}$, okolinski retrakt od Z.

Slijedeće propozicije su očigledne:

Propozicija 4.1.1. *Svaki* **AR** *za klasu* $\mathcal{C}$ *je* **ANR** *za klasu* $\mathcal{C}$.

Propozicija 4.1.2. *Ako je* $\mathcal{B}$ *slabo nasljedna topološka klasa prostora koja je sadržana u klasi* $\mathcal{C}$*, tada je svaki* **AR** *(odnosno* **ANR***) za klasu* $\mathcal{C}$ *također* **AR** *(odnosno* **ANR***) za klasu* $\mathcal{B}$.

Jednočlani prostor Y je očigledno **AR** za svaku klasu prostora koja sadrži Y.

4.2 Veza s ekstenzorima

Teorem 4.2.1. *Neka je* Y *prostor u slabo nasljednoj topološkoj klasi prostora* $\mathcal{C}$*. Ako je* Y **AE** *(odnosno* **ANE***) za klasu* $\mathcal{C}$*, tada je* Y **AR** *(odnosno* **ANR***) za klasu* $\mathcal{C}$.

Dokaz: Teorem ćemo dokazati za **ANE** i **ANR**. Dokaz za **AE** i **AR** je sličan i jednostavniji. Promotrimo proizvoljan homeomorfizam prostora Y

na zatvoreni potprostor Z_0 prostora Z iz klase $\mathcal{C}$,

$$h : Y \to Z_0\,.$$

Pošto je Y **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, preslikavanje

$$f = h^{-1} : Z_0 \to Y$$

ima proširenje $g : U \to Y$ preko otvorenog potprostora U prostora Z. Tada je kompozicija

$$r = h \circ g : U \to Z_0$$

retrakcija pa je Y **ANR** za klasu $\mathcal{C}$. $\square$

Za mnoge klase $\mathcal{C}$ imamo slijedeći obrat teorema 4.2.1:

Teorem 4.2.2. *Neka je $\mathcal{C}$ bilo koja od slijedećih slabo nasljednih topoloških klasa prostora:*

(i) svih normalnih prostora,

(ii) svih normalnih Lindelöfovih prostora,

(iii) svih kompaktnih Hausdorffovih prostora,

(iv) svih kompaktnih metrizabilnih prostora.

Tada je svaki **AR** *(odnosno* **ANR***) za klasu $\mathcal{C}$ također* **AE** *(odnosno* **ANE***) za klasu $\mathcal{C}$.*

Dokaz: Teorem ćemo dokazati za **ANR** i **ANE**. Dokaz za **AR** i **AE** je sličan i jednostavniji. Neka je Y proizvoljan **ANR** za klasu $\mathcal{C}$. Da bismo dokazali kako je Y također **ANE** za klasu $\mathcal{C}$, promotrimo bilo koje preslikavanje $f : A \to Y$ definirano na zatvorenom potprostoru A prostora X iz klase $\mathcal{C}$. Dovoljno je pokazati da f ima proširenje preko neke okoline potprostora A u prostoru X. Dokaz ćemo provesti za dva slučaja.

Slučaj I: Pretpostavimo da je $\mathcal{C}$ jedna od klasa *(i)-(iii)*. Promotrimo adjunktni prostor dobiven adjungiranjem prostora X prostoru Y pomoću preslikavanja f. Iz propozicije 2.2.3 slijedi da je Z prostor u klasi $\mathcal{C}$. Promotrimo prirodnu projekciju

$$p : W \to Z$$

topološke sume $W = X + Y$ u adjunktni prostor Z i restrikcije

$$i = p|Y \quad \text{i} \quad j = p|X\,.$$

Tada je $i : Y \to Z_0$ homeomorfizam iz Y na zatvoreni potprostor Z_0 prostora Z. Pošto je Y **ANR** za klasu $\mathcal{C}$, postoji okolina V od Z_0 u prostoru Z i retrakcija $r : V \supset Z_0$. Inverzna slika

$$U = j^{-1}(V)$$

preslikavanja $j : X \to Z$, je okolina od A u prostoru X. Definiramo preslikavanje $g : U \to Y$ uzevši

$$g(x) = (i^{-1} \circ r)[j(x)], \quad \forall x \in U\,.$$

Tada je g proširenje preslikavanje f preko U. Ovime je dokazan slučaj I.

Slučaj II: Pretpostavimo da je $\mathcal{C}$ klasa *(iv)*. Y je kompaktan metrizabilan prostor pa postoji homeomorfizam

$$h : Y \to Z_0$$

prostora Y na zatvoren potprostor Z_0 Hilbertove kocke $Z = I^{\mathbb{N}}$ (vidi [4], str. 125). Pošto je $I^{\mathbb{N}}$ kompaktan i metrizabilan prostor, a Y je **ANR** za klasu svih kompaktnih metrizabilnih prostora, postoji okolina V od Z_0 u prostoru $I^{\mathbb{N}}$ i retrakcija $r : V \supset Z_0$. S druge strane, iz korolara 3.4.2 slijedi da kompozicija

$$\Phi = h \circ f : A \to I^{\mathbb{N}}$$

ima proširenje $\phi : X \to I^{\mathbb{N}}$. Inverzna slika

$$U = \phi^{-1}(V)$$

je okolina od A u prostoru X. Definiramo preslikavanje $g : U \to Y$ uzevši

$$g(x) = (h^{-1} \circ r)[\phi(x)], \quad \forall x \in U\,.$$

Tada je g proširenje preslikavanja f preko U. Ovime je dokazan slučaj II. $\square$

Tvrdnja teorema 4.2.2 vrijedi i ako je $\mathcal{C}$ presjek bilo kojeg broja klasa *(i)-(iv)*.

Također, po propoziciji 2.2.1 adjunktni prostor čuva svojstvo biti T_1-prostor pa tvrdnja teorema 4.2.2 vrijedi i ako je $\mathcal{C}$ presjek klase svih Hausdorffovih prostora $\mathcal{H}$ sa bilo kojim brojem klasa *(i)-(iv)*.

Bibliografija

[1] Hu, Sze-Tsen: *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[2] Hu, Sze-Tsen: *Elements of General Topology*, Holden-Day INC, San Francisco, 1964.

[3] Hu, Sze-Tsen: *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, 1966.

[4] Kelley, John L.: *General Topology*, Springer-Verlag, New York, 1955.

[5] Lipschutz, Seymour: *General Topology*, McGraw-Hill, New York, 1965.